

# THÈSE

pour l'obtention du Grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS  
Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées  
Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006

*École Doctorale* : **Sciences Pour l'Ingénieur et Aéronautique**  
*Secteur de Recherche* : **Traitement du Signal et des Images**

Présentée par :  
**Martin DRUON**

## **Modélisation du mouvement par polynômes orthogonaux : application à l'étude d'écoulements fluides**

Dirigée et encadrée par :  
**Benoît TREMBLAIS**  
**Laurent DAVID**  
**Christine FERNANDEZ-MALOIGNE**

Soutenue le 11 février 2009 devant la Commission d'Examen composée de :

<b>J. BENOIS-PINEAU</b>	Professeur, LABRI - Université de Bordeaux	Rapporteur
<b>E. MÉMIN</b>	Directeur de Recherches, INRIA - Rennes	Rapporteur
<b>H. HAGEN</b>	Professeur, Université de Kaiserslautern - Allemagne	Examineur
<b>Ch. FERNANDEZ-MALOIGNE</b>	Professeur, XLIM-SIC - Université de Poitiers	Directrice
<b>B. TREMBLAIS</b>	Maître de Conférences, XLIM-SIC - Université de Poitiers	Co-directeur
<b>L. DAVID</b>	Professeur, LEA - Université de Poitiers	Co-directeur



« *Encore un bout dans le chien !*  
*Pour la peine, c'est toi qui paies les cafés...* »





---

# REMERCIEMENTS

---

Tout d'abord, je souhaite remercier l'ensemble des membres du jury ainsi que Monsieur PÉTERI du laboratoire MIA de La Rochelle, qui, malgré des emplois du temps très chargés, ont accepté d'évaluer mes travaux et sont venus assister à ma soutenance.

Je tiens également à remercier BENOIT et LAURENT, pour la qualité de leur encadrement. Ayant débuté ma thèse avec des connaissances très limitées en traitement d'images et en mécanique des fluides, cela n'a pas toujours été facile pour moi (je peux le dire maintenant). Mais vous avez toujours pris le temps de m'expliquer clairement et calmement les choses. Sans pour autant être devenu expert en la matière, vous avez tout de même réussi à me transmettre une (toute petite) partie de votre savoir et j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec vous durant ces trois années.

Je souhaite ensuite remercier les collègues et amis du SIC, toujours disponibles pour répondre à mes questions... ou faire une pause. À ce titre, je voudrais citer plus particulièrement les membres du Master 2 Recherche F3I Image cuvée 2004/2005, à savoir SÉBASTIEN, MATHIEU, PIERRE-FRANÇOIS, OLIVIER et FRANÇOIS. Que de cafés pris ensemble depuis cinq ans...

Un grand merci également aux personnes que j'ai côtoyées au LEA, non pas pour les (très !) nombreux buts inscrits aux *All-Stars* lors des tournois de foot en salle, mais bien pour leurs explications et leurs précieux conseils (tant scientifiques que gastronomiques). Je remercie plus particulièrement FRÉDÉRIC qui, pendant un an, m'a initié aux « écoulements de Couette » et autres « structures tourbillonnaires » ; puis ROMAIN qui a accepté (a-t-il eu le choix ?) de parfaire mon apprentissage pour que les écoulements de sillages ou que la POD-Galerkin n'aient (presque) plus de secrets pour moi. Tout cela en échange de quelques conseils de SLIP ou autres démonstrations Pythoniques...

Je remercie aussi tous les membres de ma famille pour leur soutien... en espérant maintenant que l'on puisse se voir plus souvent. Une pensée particulière pour ma mère et ma belle-mère qui ont eu la chance, certes, mais surtout le courage de venir voir des petites flèches bouger dans tous les sens pendant deux heures, et pour mon père qui, j'en suis sûr, aurait aimé être là mais qui, lui aussi, avait de quoi s'occuper ce 11 février 2009.

Finalement, je remercie de tout mon cœur AUDREY, celle qui fait partie de ma vie depuis 5 ans et qui a rendu les derniers mois de ma thèse beaucoup plus simples. Je rédigeais et tu faisais le reste. C'est à ton tour maintenant...

Les travaux présentés dans ce mémoire sont le résultats d'une collaboration entre les laboratoires XLIM-SIC et LEA de l'Université de Poitiers. Ils ont été financés par la Région Poitou-Charentes.



---

# SOMMAIRE

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation du mouvement : étude bibliographique</b>	<b>3</b>
1.1 Définition d'un modèle . . . . .	3
1.2 Extraction du mouvement . . . . .	5
1.2.1 Méthodes par corrélation . . . . .	5
1.2.2 Méthodes différentielles . . . . .	8
1.3 Modélisation des champs de déplacements . . . . .	12
1.3.1 Modélisation du mouvement par séries de fonctions . . . . .	12
1.4 Conclusion . . . . .	22
<b>2 Modélisation du mouvement par polynômes orthogonaux</b>	<b>23</b>
2.1 Cadre théorique de l'approximation de fonctions réelles . . . . .	23
2.1.1 Principe général de l'approximation de fonctions . . . . .	23
2.1.2 Approximation au sens des moindres carrés . . . . .	25
2.2 Modélisation des champs de déplacement par bases de polynômes . . . . .	26
2.2.1 Définition des champs de déplacement et des fonctions polynomiales . . . . .	27
2.2.2 Génération d'une base orthogonale bidimensionnelle . . . . .	27
2.2.3 Approximation d'un champ de déplacement . . . . .	29
2.3 Discrétisation du problème . . . . .	32
2.3.1 Méthode directe . . . . .	33
2.3.2 Méthode simplifiée . . . . .	33
2.3.3 Méthode optimisée pour le traitement séquentiel d'une série de champs de déplacement . . . . .	33
2.4 Propriétés de la méthode . . . . .	33
2.5 Complexité et occupation mémoire . . . . .	34
2.5.1 Implantation informatique des polynômes . . . . .	34
2.5.2 Génération de la base . . . . .	35
2.5.3 Projection d'un ensemble de champs sur la base . . . . .	35
2.5.4 Reconstruction d'un champ . . . . .	37
2.6 Généralisation multidimensionnelle multicomposante . . . . .	38
2.6.1 Définition des champs de déplacements et des fonctions polynomiales . . . . .	38
2.6.2 Génération d'une base orthogonale multidimensionnelle . . . . .	38
2.6.3 Approximation d'un champ multidimensionnel multicomposante . . . . .	39
2.6.4 Reconstruction d'un champ . . . . .	40
2.6.5 Propriétés du modèle multidimensionnel multicomposante . . . . .	40

2.6.6	Complexité et occupation mémoire . . . . .	40
2.7	Choix d'une base de polynômes . . . . .	40
2.8	Conclusion . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Interprétation du mouvement</b>	<b>47</b>
3.1	Étude de mouvements affines . . . . .	47
3.1.1	Étude de mouvements affines « élémentaires » . . . . .	47
3.1.2	Étude de la valeur des coefficients . . . . .	50
3.1.3	Étude de mouvements affines « composés » . . . . .	50
3.1.4	Étude de mouvements affines aléatoires . . . . .	52
3.2	Résistance au bruit . . . . .	53
3.2.1	Étude du bruit gaussien . . . . .	54
3.2.2	Étude du bruit impulsionnel . . . . .	55
3.3	Analyse des mouvements de caméra . . . . .	56
3.3.1	Évaluation de la qualité du modèle sur des champs expérimentaux . . . . .	58
3.3.2	Étude de séquences cinématographiques . . . . .	60
3.3.3	Étude de la séquence « garden » . . . . .	60
3.3.4	Étude de la séquence « tempete » . . . . .	62
3.3.5	Étude de la séquence « coastguard » . . . . .	64
3.3.6	Temps de calcul . . . . .	66
3.4	Interprétation du comportement d'un utilisateur devant une webcam . . . . .	66
3.5	Conclusion . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Application à la mécanique des fluides</b>	<b>75</b>
4.1	Étude d'un écoulement au sein d'une cavité rigide . . . . .	75
4.1.1	Étude par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) . . . . .	78
4.1.2	Étude du mouvement dominant . . . . .	79
4.1.3	Quantité d'énergie cinétique modélisée . . . . .	80
4.1.4	Étude de l'évolution temporelle des coefficients . . . . .	82
4.1.5	Temps de calcul et occupation mémoire . . . . .	83
4.1.6	Réduction des données . . . . .	83
4.2	Écoulement en aval d'un demi-cylindre . . . . .	84
4.2.1	Étude par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) . . . . .	85
4.2.2	Qualité de la modélisation par base de polynômes . . . . .	87
4.2.3	Étude de l'évolution temporelle des coefficients . . . . .	89
4.2.4	Temps de calcul et occupation mémoire . . . . .	92
4.2.5	Réduction des données . . . . .	93
4.3	Écoulement en aval d'un cylindre carré . . . . .	93
4.3.1	Étude par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) . . . . .	95
4.3.2	Qualité de la modélisation par base de polynômes . . . . .	98
4.3.3	Étude de l'évolution temporelle des coefficients . . . . .	99
4.3.4	Temps de calcul et occupation mémoire . . . . .	101
4.3.5	Réduction des données . . . . .	101
4.4	Conclusion . . . . .	102

<b>5</b>	<b>Modélisation spatio-temporelle</b>	<b>103</b>
5.1	Modélisation par bases de polynômes 3D . . . . .	103
5.1.1	Qualité de la modélisation pour la séquence « demi-cylindre » . . . . .	105
5.1.2	Qualité de la modélisation pour la séquence « cylindre-carré » . . . . .	107
5.1.3	Temps de calcul et occupation mémoire . . . . .	108
5.1.4	Réduction des données . . . . .	109
5.1.5	Conclusion . . . . .	109
5.2	Modélisation 2D + 1D . . . . .	110
5.2.1	Qualité de la modélisation pour la séquence « demi-cylindre » . . . . .	112
5.2.2	Qualité de la modélisation pour la séquence « cylindre-carré » . . . . .	113
5.2.3	Temps de calcul et occupation mémoire . . . . .	116
5.2.4	Réduction des données . . . . .	116
5.2.5	Conclusion . . . . .	116
5.3	Influence de la résolution temporelle . . . . .	117
5.4	Conclusion . . . . .	118
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>131</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>



---

## TABLE DES FIGURES

---

1.1	Exemples de données à modéliser . . . . .	4
1.2	Exemples de champs de déplacement associés aux séquences « garden », « web- cam » et « cylindre-carré » . . . . .	4
1.3	Exemple de carte de corrélation . . . . .	6
1.4	Principe de l'interpolation sub-pixel . . . . .	7
1.5	Problème du forçage de pic . . . . .	7
1.6	Comparaison des résultats obtenus en utilisant une méthode par corrélation et une méthode par flot optique . . . . .	11
1.7	Champs de déplacement extraits de la séquence « cylindre-carré » . . . . .	14
1.8	Représentation des trois premiers modes obtenus par une décomposition ortho- gonale aux valeurs propres sur la séquence « cylindre-carré » . . . . .	14
1.9	Évolution de trois coefficients temporels et portrait de phase entre les deuxième et troisième coefficients temporels issus d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres sur la séquence « cylindre-carré » . . . . .	15
1.10	Représentation des 25 premières harmoniques paires et impaires . . . . .	17
1.11	Bases de fonctions B-splines cubique . . . . .	18
1.12	Exemple de champs de déplacement extraits d'une base composée des poly- nômes de Zernike . . . . .	20
1.13	Exemple de « déplacements caractéristiques » . . . . .	20
1.14	Exemple de base permettant de modéliser la structure spatiale d'un bord . . . .	21
1.15	Exemple de base permettant de modéliser la structure spatiale d'une barre . . .	21
1.16	Exemple de champs de déplacement constituant la base . . . . .	21
1.17	Exemple de champs « prototypes » . . . . .	22
1.18	Exemple de champs « modèles » . . . . .	22
2.1	Exemples de champs de déplacement bidimensionnels à deux composantes . .	27
2.2	Représentation tabulaire d'une base bidimensionnelle de degré $D$ . . . . .	29
2.3	Processus utilisé pour la modélisation et la reconstruction d'un champ de dé- placement . . . . .	30
2.4	Exemple de combinaisons linéaires de polynômes permettant de modéliser un champ synthétique . . . . .	30
2.5	Influence du degré de la base sur la modélisation d'un mouvement complexe . .	31
2.6	Représentation schématique d'une base de degré 3 en 1D, 2D et 3D . . . . .	39
2.7	Valeurs des premiers polynômes de Legendre pour une base bidimensionnelle orthonormale de degré 2 . . . . .	42
2.8	Représentation des différents polynômes qui composent une base de Legendre de degré 5 . . . . .	44

2.9	Représentation des différents polynômes qui composent une base de Legendre de degré 5 (suite) . . . . .	45
3.1	Représentation des quatre mouvements affines « élémentaires » . . . . .	48
3.2	Représentation de quatre mouvements divergents ayant des quantités de mouvement différentes . . . . .	51
3.3	Évolution des coefficients de projection en fonction de la quantité de mouvement pour la composante $\mathcal{V}^1$ et la composante $\mathcal{V}^2$ . . . . .	51
3.4	Représentation de deux mouvements affines « composés » . . . . .	52
3.5	Mouvement « rotation » : représentation du mouvement de rotation et des profils des vitesses horizontales et verticales pour la droite $y = 0$ . . . . .	53
3.6	Mouvement « tourbillon » : représentation du mouvement tourbillonnaire et des profils des vitesses horizontales et verticales pour la droite $y = 0$ . . . . .	54
3.7	Représentation de l'erreur de modélisation en fonction du degré la base pour des quantités de bruit gaussien variables, pour le mouvement de rotation et le mouvement tourbillonnaire . . . . .	55
3.8	Représentation de l'erreur de modélisation en fonction du degré la base pour des quantités de bruit impulsionnel variables, pour le mouvement de rotation et le mouvement tourbillonnaire . . . . .	56
3.9	Représentation du dispositif et de la texture utilisés pour l'acquisition de champs affines expérimentaux . . . . .	59
3.10	Séquence « garden » : images extraites de la séquence et champs de déplacement associés . . . . .	61
3.11	Séquence « garden » : évolution temporelle des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom . . . . .	62
3.12	Séquence « tempete » : images extraites de la séquence et champs de déplacement associés . . . . .	63
3.13	Séquence « tempete » : évolution temporelle des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom . . . . .	63
3.14	Séquence « coastguard » : images extraites de la séquence et champs de déplacement associés . . . . .	64
3.15	Séquence « coastguard » : évolution temporelle des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom . . . . .	65
3.16	Séquence « coastguard » : évolution temporelle des quantités d'accélération associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom . . . . .	65
3.17	Séquence « webcam » : images extraites de la séquence et champs de déplacement associés . . . . .	67
3.18	Séquence « webcam » : évolution temporelle des deux coefficients de projection $\tilde{v}_{0,0}^1$ et $\tilde{v}_{0,0}^2$ . . . . .	68
3.19	Séquence « webcam » : évolution de la position de la tête de l'utilisateur en fonction du temps . . . . .	69
3.20	Influence du bruit gaussien en utilisant une base de degré 5 . . . . .	70
3.21	Influence du bruit gaussien en utilisant une base de degré 25 . . . . .	71
3.22	Influence du bruit impulsionnel en utilisant une base de degré 5 . . . . .	72



3.23	Influence du bruit impulsionnel en utilisant une base de degré 25 . . . . .	73
4.1	Séquence « cavité » : dispositif expérimental et représentation d'une cavité . . .	76
4.2	Séquence « cavité » : topologie de l'écoulement au sein d'une cavité . . . . .	77
4.3	Séquence « cavité » : représentation de trois champs de déplacement instantanés	77
4.4	Séquence « cavité » : représentation du champ de déplacement moyen . . . . .	78
4.5	Séquence « cavité » : histogrammes de la composante $\mathcal{V}^1$ , de la composante $\mathcal{V}^2$ et de la norme . . . . .	78
4.6	Séquence « cavité » : contribution de chaque mode POD . . . . .	79
4.7	Séquence « cavité » : représentation des trois premiers modes POD . . . . .	79
4.8	Séquence « cavité » : modélisation simplifiée du 24 <sup>e</sup> champ instantané de la séquence . . . . .	80
4.9	Séquence « cavité » : quantité d'énergie cinétique modélisée . . . . .	81
4.10	Séquence « cavité » : évolution temporelle des cinq coefficients de projection les plus énergétiques pour la composante $\mathcal{V}^1$ et la composante $\mathcal{V}^2$ . . . . .	83
4.11	Séquence « demi-cylindre » : topologie de l'écoulement . . . . .	84
4.12	Séquence « demi-cylindre » : représentation de trois champs de déplacement instantanés . . . . .	85
4.13	Séquence « demi-cylindre » : représentation du champ de déplacement moyen .	85
4.14	Séquence « demi-cylindre » : histogrammes de la composante $\mathcal{V}^1$ , de la compo- sante $\mathcal{V}^2$ et de la norme . . . . .	85
4.15	Séquence « demi-cylindre » : zooms sur une partie des histogrammes de la composante $\mathcal{V}^1$ , de la composante $\mathcal{V}^2$ et de la norme . . . . .	86
4.16	Séquence « demi-cylindre » : contribution de chaque mode POD . . . . .	86
4.17	Séquence « demi-cylindre » : représentation des trois premiers modes POD . .	87
4.18	Séquence « demi-cylindre » : évolution temporelle des trois coefficients asso- ciés aux trois premiers modes POD . . . . .	88
4.19	Séquence « demi-cylindre » : quantité d'énergie cinétique modélisée . . . . .	88
4.20	Séquence « demi-cylindre » : comparaison de la quantité d'énergie cinétique modélisée pour chaque champ de la séquence par une décomposition orthogo- nale aux valeurs propres et une modélisation par base de polynômes . . . . .	89
4.21	Séquence « demi-cylindre » : évolution temporelle des cinq coefficients de pro- jection les plus énergétiques pour la composante $\mathcal{V}^1$ et la composante $\mathcal{V}^2$ . . . .	91
4.22	Séquence « demi-cylindre » : représentation des champs de déplacement asso- ciés aux moyennes temporelles . . . . .	91
4.23	Séquence « demi-cylindre » : portraits de phase . . . . .	92
4.24	Séquence « cylindre-carré » : topologie de l'écoulement . . . . .	94
4.25	Séquence « cylindre-carré » : représentation du dispositif expérimental . . . . .	94
4.26	Séquence « cylindre-carré » : exemple d'image obtenue avec le dispositif d'ac- quisition . . . . .	94
4.27	Séquence « cylindre-carré » : représentation de trois champs de déplacement instantanés . . . . .	95
4.28	Séquence « cylindre-carré » : représentation du champ de déplacement moyen .	95
4.29	Séquence « cylindre-carré » : histogrammes de la composante $\mathcal{V}^1$ , de la compo- sante $\mathcal{V}^2$ et de la norme . . . . .	96
4.30	Séquence « cylindre-carré » : contribution de chaque mode POD . . . . .	96
4.31	Séquence « cylindre-carré » : représentation des trois premiers modes POD . .	97

4.32	Séquence « cylindre-carré » : évolution temporelle des trois coefficients associés aux trois premiers modes POD . . . . .	97
4.33	Séquence « cylindre-carré » : quantité d'énergie cinétique modélisée . . . . .	98
4.34	Séquence « cylindre-carré » : comparaison de la quantité d'énergie cinétique modélisée pour chaque champ de la séquence par une décomposition orthogonale aux valeurs propres et une modélisation par base de polynômes . . . . .	99
4.35	Séquence « cylindre-carré » : évolution temporelle des cinq coefficients de projection les plus énergétiques pour la composante $\mathcal{V}^1$ et la composante $\mathcal{V}^2$ . . . . .	100
4.36	Séquence « cylindre-carré » : portraits de phase . . . . .	101
5.1	Représentation du processus de modélisation tridimensionnelle . . . . .	104
5.2	Séquence « demi-cylindre » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée par un modèle 2D ou un modèle 3D, avec une base de degré 7 . . . . .	106
5.3	Séquence « demi-cylindre » : représentation des champs 304 et 363, ainsi que les champs précédents et les champs suivants . . . . .	106
5.4	Séquence « demi-cylindre » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée par un modèle 2D ou un modèle 3D, avec une base de degré 22 . . . . .	107
5.5	Séquence « cylindre-carré » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée par un modèle 2D ou un modèle 3D, avec une base de degré 11 . . . . .	108
5.6	Séquence « cylindre-carré » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée par un modèle 2D ou un modèle 3D, avec une base de degré 20 . . . . .	108
5.7	Représentation du processus permettant de modéliser une séquence par un modèle 2D+1D . . . . .	110
5.8	Séquence « demi-cylindre » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant un modèle 2D, un modèle 3D ou un modèle 2D+1D . . . . .	112
5.9	Séquence « demi-cylindre » : représentation de l'évolution temporelle des deux coefficients de projection les plus énergétiques de la deuxième composante en utilisant une base bidimensionnelle de degré 22 et une base monodimensionnelle de degré 22 . . . . .	113
5.10	Séquence « demi-cylindre » : représentation des champs 304 et 363 reconstruits en utilisant le modèle 2D+1D, ainsi que les champs précédents et les champs suivants . . . . .	113
5.11	Séquence « cylindre-carré » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant un modèle 2D, un modèle 3D ou un modèle 2D+1D . . . . .	114
5.12	Séquence « cylindre-carré » : représentation de l'évolution temporelle des deux coefficients de projection les plus énergétiques de la deuxième composante en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 20 . . . . .	114
5.13	Séquence « cylindre-carré » : représentation de l'erreur de modélisation en utilisant un modèle 2D et deux modèles 2D+1D . . . . .	115
5.14	Séquence « cylindre-carré » : représentation de l'évolution temporelle des deux coefficients de projection les plus énergétiques de la deuxième composante en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 35 . . . . .	115
5.15	Processus de test utilisé pour évaluer l'influence de la résolution temporelle . . . . .	117
5.16	Séquence « cylindre-carré » : évolution de l'erreur quadratique en conservant tous les champs, 1 champ sur 2, 1 champ sur 5, 1 champ sur 10, 1 champ sur 20 et 1 champ sur 50 . . . . .	118

5.17	Séquence « cylindre-carré » : comparaison de l'évolution temporelle du coefficient le plus énergétique de la séquence en utilisant un modèle 2D ou un modèle 2D+1D . . . . .	119
5.18	Séquence « demi-cylindre » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 7 et de champs modélisés avec une base tridimensionnelle de degré 7 . . . . .	121
5.19	Séquence « demi-cylindre » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 22 et de champs modélisés avec une base tridimensionnelle de degré 22 . . . . .	122
5.20	Séquence « cylindre-carré » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 11 et de champs modélisés avec une base tridimensionnelle de degré 11 . . . . .	123
5.21	Séquence « cylindre-carré » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 20 et de champs modélisés avec une base tridimensionnelle de degré 20 . . . . .	124
5.22	Séquence « demi-cylindre » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 22 et de champs modélisés avec des bases monodimensionnelles et bidimensionnelles de degré 22 . . . . .	125
5.23	Séquence « cylindre-carré » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 20 et de champs modélisés avec des bases monodimensionnelles et bidimensionnelles de degré 20 . . . . .	126
5.24	Séquence « cylindre-carré » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 20 et de champs modélisés avec un modèle 2D+1D en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 35 . . . . .	127
5.25	Séquence « cylindre-carré » : représentation de la distance, pour chaque vecteur, entre les champs originaux et les champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 20 et entre les champs originaux et les champs modélisés avec un modèle 2D+1D en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 35 . . . . .	128
5.26	Séquence « cylindre-carré » : représentation du champ n°680 reconstruit en utilisant un modèle 2D+1D et tous les champs de la séquence, 1 champ sur 2, 1 champ sur 5, 1 champ sur 10, 1 champ sur 20 ou 1 champ sur 50 . . . . .	129



---

## LISTE DES TABLEAUX

---

2.1	Paramètres utilisés dans la formule de récurrence pour la génération de quelques familles de polynômes orthogonaux connus . . . . .	28
2.2	Complexité des différentes opérations pour une modélisation multidimensionnelle multicomposante . . . . .	41
2.3	Occupation mémoire des différentes opérations pour une modélisation multidimensionnelle multicomposante . . . . .	41
3.1	Paramètres utilisés pour la génération des mouvements affines « élémentaires »	48
3.2	Coefficients de projection obtenus après projection des mouvements affines « élémentaires » sur une base de degré 1 . . . . .	49
3.3	Paramètres utilisés pour la génération de mouvements affines « composés » . .	52
3.4	Coefficients de projection obtenus après projection de deux mouvements affines « composés » sur une base de degré 1 . . . . .	52
3.5	Liste des principaux modèles polynomiaux de mouvements de caméra . . . . .	57
3.6	Erreurs de modélisation obtenues en fonction du type de mouvement modélisé .	59
3.7	Séquence « garden » : énergie totale, énergie relative exprimée en pourcent, moyenne et écart-type des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom . . . . .	61
3.8	Séquence « tempete » : énergie totale, énergie relative exprimée en pourcent, moyenne et écart-type des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom . . . . .	63
3.9	Séquence « coastguard » : énergie totale, énergie relative exprimée en pourcent, moyenne et écart-type des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom . . . . .	65
3.10	Temps de calcul nécessaires au traitement des séquences « garden », « tempete » et « coastguard » . . . . .	66
3.11	Séquence « webcam » : énergie totale, énergie relative exprimée en pourcent, moyenne et écart-type des six coefficients issus d'une projection sur une base de degré 1 . . . . .	67
4.1	Séquence « cavité » : énergie et énergie cumulée, exprimées en pourcent, des cinq coefficients de projection les plus énergétiques, pour chaque composante .	82
4.2	Séquence « cavité » : taux de compression obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et notre méthode (MBP) . . . . .	83
4.3	Séquence « demi-cylindre » : contribution et contribution cumulée, exprimées en pourcent, de quelques modes . . . . .	87

4.4	Séquence « demi-cylindre » : moyenne, écart-type, valeur minimale et valeur maximale de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) ou notre méthode (MBP) . . .	89
4.5	Séquence « demi-cylindre » : énergie et énergie cumulée, exprimées en pourcent, des cinq coefficients les plus énergétiques, pour chaque composante .	90
4.6	Séquence « demi-cylindre » : taux de compression obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et notre méthode (MBP) . . . . .	93
4.7	Séquence « cylindre-carré » : contribution et contribution cumulée, exprimées en pourcent, de quelques modes . . . . .	97
4.8	Séquence « cylindre-carré » : moyenne, écart-type, valeur minimale et valeur maximale de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) ou notre méthode (MBP) . . .	99
4.9	Séquence « cylindre-carré » : énergie et énergie cumulée, exprimées en pourcent, des cinq coefficients les plus énergétiques, pour chaque composante .	100
4.10	Séquence « cylindre-carré » : taux de compression obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et notre méthode (MBP) . . . . .	101
5.1	Complexité des différentes opérations pour la modélisation d'un champ tridimensionnel à deux composantes . . . . .	104
5.2	Occupation mémoire des différentes opérations pour la modélisation d'un champ tridimensionnel à deux composantes . . . . .	105
5.3	Taux de compression obtenus avec un modèle 2D et un modèle 3D pour les séquences « demi-cylindre » et « cylindre-carré » . . . . .	109
5.4	Complexité des différentes opérations nécessaires à la modélisation d'un champ de déplacement en utilisant le modèle 2D+1D . . . . .	111
5.5	Occupation mémoire des différentes opérations nécessaires à la modélisation d'un champ de déplacement en utilisant le modèle 2D+1D . . . . .	111
5.6	Taux de compression obtenus avec un modèle 2D et un modèle 2D+1D pour les séquences « demi-cylindre » et « cylindre-carré » . . . . .	116

---

# INTRODUCTION

---

L'analyse automatique du mouvement contenu dans des séquences d'images suscite l'intérêt des chercheurs car elle ouvre de nombreuses perspectives dans des domaines variés tels que l'audiovisuel, la télésurveillance, l'étude du comportement ou la mécanique des fluides. En effet, l'utilisation de la vidéo permet d'obtenir de nouvelles informations telles que la vitesse ou l'accélération des différents objets qui composent la scène étudiée, ces informations ne pouvant pas être obtenues à partir d'une seule image. Elles viennent alors s'ajouter aux données déjà utilisées en traitement d'images (formes, couleurs, textures...) et permettent d'améliorer l'interprétation du contenu de la scène. Dans le domaine de la mécanique des fluides, les écoulements à analyser (phénomènes météorologiques ou aérodynamiques, flux sanguin...) sont complexes. L'acquisition de ces mouvements nécessite donc l'utilisation de caméras hautes résolutions capables de filmer ces phénomènes à des fréquences élevées. De ce fait, la quantité de données à traiter est importante. L'identification et le suivi des structures principales qui composent l'écoulement nécessitent alors le développement de modèles d'ordres réduits représentant au mieux la dynamique du mouvement.

Actuellement, une méthode de référence pour l'étude d'écoulements fluides est la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Elle caractérise un écoulement par des combinaisons linéaires de fonctions, appelées *modes*, propres à celui-ci. L'utilisation d'une base propre à chaque écoulement permet d'obtenir une représentation optimale de l'écoulement au sens l'énergie cinétique. Mais il est alors difficile de comparer plusieurs séquences car elles ne possèdent pas le même référentiel. De plus, l'interprétation physique de ces différents modes est délicate, voire impossible. Une autre approche consiste à choisir la base sans connaissance *a priori* du mouvement étudié. C'est cette approche que nous avons choisi d'explorer dans ce mémoire. Nous souhaitons donc proposer une nouvelle méthode permettant d'extraire certaines caractéristiques de l'écoulement qui ne peuvent pas être obtenues par une décomposition orthogonale aux valeurs propres.

Nous proposons donc une méthode permettant de modéliser tout type de mouvement par des combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux. Après avoir présenté les bases théoriques de notre modèle, nous étudions ses différentes propriétés. Tout d'abord, il permet d'obtenir une expression polynomiale du mouvement. Le calcul de certaines grandeurs physiques telles que l'accélération ou la pression se ramène alors à des calculs différentiels sur des polynômes. Le choix des polynômes nous permet également obtenir une méthode peu coûteuse en temps de

calcul. Cette propriété nous permet de traiter de gros volumes de données en des temps réduits. Nous nous intéressons également aux taux de compression des données engendrés par notre modèle. En utilisant un nombre restreint de polynômes, nous pouvons obtenir une modélisation réduite du mouvement. Nous utilisons alors ce modèle pour analyser les mouvements de caméra contenus dans des séquences d'images et nous expliquons comment extraire certaines informations sémantiques. Un nombre plus important de polynômes permet de modéliser des mouvements complexes tels que des écoulements fluides. Finalement, nous comparons notre méthode à la décomposition orthogonale aux valeurs propres.

Ce mémoire s'organise autour de deux parties. Tout d'abord, nous nous intéressons à la modélisation du mouvement, de façon générale, puis nous appliquons notre méthode à l'analyse de mouvements fluides. Le chapitre 1 dresse un état de l'art des différentes méthodes de modélisation du mouvement. Après avoir défini la notion de modèle, nous présentons les méthodes permettant d'extraire le mouvement à partir d'un ensemble d'images. Nous étudions alors les méthodes destinées à modéliser les champs de déplacement obtenus par la phase d'extraction. Nous présentons ensuite, dans le chapitre 2, le cadre théorique de notre méthode. Après quelques rappels sur les principes de l'approximation de fonctions réelles continues au sens des moindres carrés, nous détaillons le processus permettant d'exprimer des champs de déplacement bidimensionnels à deux composantes par des combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux. Nous étudions ensuite les propriétés de notre modèle et nous donnons sa complexité. Finalement, nous généralisons notre processus à la modélisation des champs multi-dimensionnels multi-composantes. Dans le chapitre 3, nous appliquons notre méthode sur des champs synthétiques et expérimentaux. Nous expliquons alors comment donner un sens physique à notre modèle. Nous évaluons ensuite sa résistance au bruit. Puis, nous l'appliquons sur des séquences cinématographiques et nous montrons comment extraire certaines informations sémantiques. Dans le chapitre 4, nous étudions le comportement de notre méthode sur des séquences expérimentales représentant des écoulements fluides. Nous analysons alors la qualité de notre modèle et nous comparons les résultats obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres. Nous étudions également les temps de calcul et l'occupation mémoire de notre méthode ainsi que sa capacité à compresser les données. Finalement, dans le chapitre 5, nous proposons d'étendre le modèle spatial défini jusqu'à présent à un modèle spatio-temporel. Nous proposons alors deux nouveaux modèles et nous évaluons leur qualité sur les séquences présentées au chapitre 4. Nous étudions également l'influence de la résolution temporelle de la séquence sur la qualité des résultats.



---

# CHAPITRE 1

---

## MODÉLISATION DU MOUVEMENT : ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

---

Dans ce chapitre, nous dressons un état de l'art des différentes méthodes de modélisation des champs de déplacement. Tout d'abord, nous proposons une définition de la notion de *modèle*. Nous présentons ensuite un ensemble de méthodes permettant d'extraire le mouvement contenu dans des séquences d'images. Finalement, nous étudions les méthodes permettant de modéliser les champs de déplacement obtenus lors de la phase d'extraction. Nous nous intéressons alors plus particulièrement à la modélisation du mouvement par des séries de fonctions.

### 1.1 Définition d'un modèle

Une méthode permettant d'obtenir une représentation du mouvement consiste à enregistrer une série d'images, espacées par un intervalle de temps faible, à l'aide d'une caméra. Celle-ci délivre alors une matrice de pixels, en couleur ou en niveau de gris, évoluant dans le temps.

Par exemple, la FIGURE 1.1 montre trois exemples de données que nous étudions durant ce mémoire. L'image de gauche, de taille  $352 \times 240$  pixels, est extraite de la séquence « garden ». Cette séquence représente le déplacement horizontal d'une caméra dans un jardin. Elle est aujourd'hui considérée comme étant de faible résolution et bruitée. L'image du milieu représente un utilisateur effectuant des mouvements de tête devant une webcam. La résolution de cette image est également de  $352 \times 240$  pixels. Les webcams permettent d'obtenir des images numériques à des coûts très réduits mais la qualité de leur capteur rend ce type de matériel très sensible au bruit, notamment aux variations lumineuses. Ces deux séquences sont étudiées plus en détail au chapitre 3. La troisième image, de taille  $1024 \times 1024$  pixels, est extraite de la séquence « cylindre-carré ». Elle représente l'évolution de l'écoulement de l'air derrière un cylindre carré. Pour étudier l'évolution de ce fluide, des particules réfléchissantes, ici des gouttelettes d'huile, sont introduites dans le fluide et éclairées par un laser. Une caméra haute résolution et extrêmement sensible à la lumière effectue alors une série de clichés à des fréquences pouvant atteindre plusieurs milliers d'images par seconde. Cette séquence est étudiée plus en détail dans les chapitres 4 et 5. Cette méthode d'acquisition, appelée *vélocimétrie par images de particules* (Particle Image Velocimetry - PIV), est fréquemment utilisée en mécanique



FIGURE 1.1 – Exemples de données à modéliser. À gauche, les données sont issues d’une caméra dont la fréquence d’acquisition est de 25 images par seconde ; au milieu, les données proviennent d’une webcam et à droite, les données sont issues d’une caméra haute résolution cadencée à 2 000 images par seconde.

des fluides. Dans [David 05a], DAVID détaille la mise en œuvre de cette technique, en étudiant notamment les différents problèmes liés au choix des particules, des lasers ou des caméras.

Nous cherchons donc à modéliser l’ensemble des pixels qui constitue chaque séquence. Certains auteurs proposent de représenter la séquence comme une image où chaque pixel est une donnée vectorielle représentant l’évolution dans le temps des intensités lumineuses. On parle alors de *textures de mouvement* [Nelson 92, Polana 94, Szummer 96, Bobick 01, Li 02]. Une autre approche consiste à extraire à partir de ces images des *champs de déplacement*. Ces champs sont constitués d’un ensemble de vecteurs et représentent les déplacements des pixels entre deux images. La FIGURE 1.2 montre trois exemples de champs de déplacement, associés aux trois séquences présentées précédemment. Ces champs de déplacement sont *réguliers* : tous les vecteurs du champ sont disposés selon une grille régulière et à chaque point de la grille correspond un vecteur.

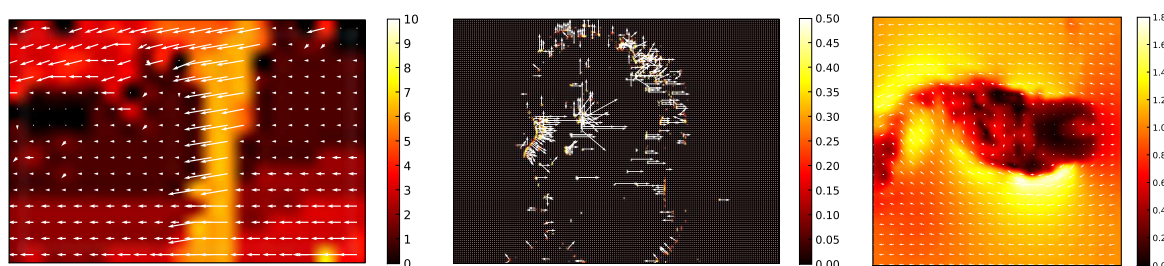


FIGURE 1.2 – Exemples de champs de déplacement associés aux séquences « garden », « webcam » et « cylindre-carré ».

Durant ces travaux, nous présentons une méthode permettant de modéliser ces champs de déplacement réguliers. Nous orientons notre modèle autour des quatre points suivants : l’interprétation physique, le temps de calcul, la réduction d’ordre et la simulation.

Nous présentons maintenant des méthodes permettant d’extraire les champs de déplacement à partir d’un ensemble d’images.

## 1.2 Extraction du mouvement

L'extraction du mouvement, c'est-à-dire le calcul des champs de déplacement à partir de séquences d'images, a donné lieu à de nombreux travaux. MÉMIN propose un état de l'art des différentes méthodes d'estimation du mouvement, avec une attention particulière pour l'extraction de champs de déplacement représentant des écoulements fluides [Mémin 03]. Dans [Barron 94], BARRON *et al.* classent les différentes méthodes selon quatre catégories : les méthodes par corrélation, les méthodes différentielles, les méthodes basées sur l'énergie et les méthodes basées sur la phase. Ayant eu l'occasion de travailler avec des données issues des deux premières méthodes, nous les présentons plus en détail ici.

### 1.2.1 Méthodes par corrélation

#### Principe

Les méthodes d'extraction du mouvement par corrélation (*Block-Matching*) cherchent à estimer la position d'un ensemble de motifs extraits d'une image à un instant  $t$ , notée  $I(t)$ , dans une image à l'instant suivant  $t + \Delta t$ , notée  $I(t + \Delta t)$ , avec  $\Delta t$  le pas d'échantillonnage temporel. Tout d'abord, on extrait une fenêtre rectangulaire de l'image  $I(t)$ . On cherche alors, dans l'image  $I(t + \Delta t)$ , la fenêtre  $F_2$ , de taille identique à  $F_1$ , telle que la corrélation entre  $F_1$  et  $F_2$  soit maximale. Pour cela, on déplace la fenêtre  $F_2$  dans l'image  $I(t + \Delta t)$  et on calcule, pour chaque position, la corrélation entre les fenêtres  $F_1$  et  $F_2$ . Cette corrélation peut être calculée grâce à la formule de corrélation normalisée suivante :

$$C(i, j) = \frac{\sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N F_1(m, n) \cdot F_2(i + m, j + n)}{\sqrt{\sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N (F_1(m, n) - \overline{F_1})^2 \cdot \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-N}^N (F_2(m, n) - \overline{F_2})^2}} \quad (1.1)$$

avec  $(i, j)$  la position du centre de la fenêtre  $F_2$  de taille  $(2M + 1) \times (2N + 1)$  et  $\overline{F_1}$  (resp.  $\overline{F_2}$ ) la moyenne spatiale des intensités lumineuses de la fenêtre  $F_1$  (resp.  $F_2$ ). On obtient alors une *carte de corrélation* (cf. FIGURE 1.3). Le déplacement de la fenêtre entre l'image initiale  $I(t)$  et l'image  $I(t + \Delta t)$  est obtenu en déterminant, sur la carte de corrélation, la position du plus grand pic par rapport au centre de la carte. Finalement, ce processus est répété pour toutes les fenêtres de l'image initiale. Au final, on obtient le champ de déplacement représentant le mouvement entre ces deux images.

Cette méthode offre l'avantage d'être facilement implantable car elle ne nécessite que des opérations élémentaires telles que des sommes et des produits sur des entiers représentant l'intensité lumineuse de chaque pixel. Par contre, sa complexité est en  $\Theta(n^2)$ . Selon la taille des fenêtres, le nombre d'opérations nécessaires pour calculer le produit de corrélation peut donc être important. Pour diminuer ce nombre, on peut limiter la recherche à une zone restreinte située autour de la fenêtre initiale. En pratique, la taille de cette zone dépend de la dynamique du mouvement étudié et de l'intervalle de temps entre les deux images. De plus, cette méthode ne permet généralement pas d'obtenir des champs de déplacement denses, c'est-à-dire composés d'un vecteur par pixel.

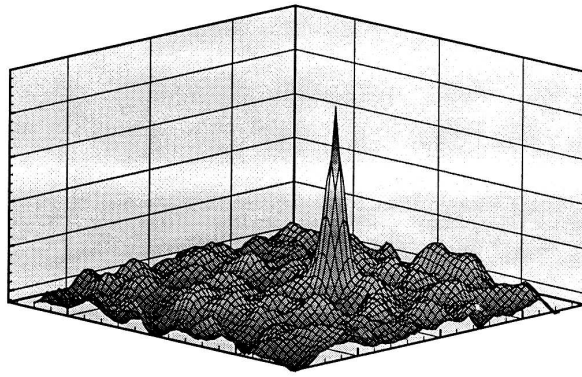


FIGURE 1.3 – Exemple de carte de corrélation. La position du pic permet de déterminer le déplacement entre les fenêtres  $F_1$  et  $F_2$ . Image extraite de [Lecordier 97].

Afin d'accélérer les temps de calcul, la corrélation entre les fenêtres  $F_1$  et  $F_2$  peut être obtenue par transformée de Fourier rapide (FFT). La carte de corrélation est alors déterminée en calculant la transformée de Fourier inverse du produit de convolution entre la transformée de Fourier de la fenêtre  $F_1$  et le conjugué de la transformée de Fourier de la fenêtre  $F_2$ . La complexité de la méthode est alors dépendante de l'algorithme utilisé pour calculer les transformées de Fourier des deux fenêtres. En utilisant la transformée de Fourier rapide, cette complexité est en  $\Theta(n \log(n))$ . Cette méthode offre donc généralement des temps de calcul plus faibles que la version discrète, notamment si la taille des fenêtres est importante. Par contre, des phénomènes d'*aliasing* peuvent apparaître lorsque le déplacement réel est supérieur à la moitié de la taille de la fenêtre. Dans ce cas, le déplacement estimé est égal au déplacement réel moins la taille de la fenêtre.

L'extraction des champs de déplacement par corrélation est fréquemment utilisée en mécanique des fluides. La compression des séquences au format MPEG utilise également un algorithme basé sur la corrélation d'images [Tudor 95].

### Interpolation sub-pixel

Chaque vecteur du champ de déplacement est estimé par rapport à la position du pic sur la carte de corrélation. Les calculs étant effectués sur des valeurs entières, la précision de chaque vecteur est donc de  $\pm 0.5$  pixel. Pour améliorer cette précision, certains auteurs proposent d'envelopper le pic de corrélation discret par une fonction continue. Le vecteur déplacement est alors calculé à partir du maximum de cette fonction continue (cf. FIGURE 1.4). Plusieurs fonctions-enveloppe sont utilisées telles que la fonction barycentre, la fonction gaussienne ou la fonction parabolique [David 05a].

### Forçage de pic

Durant l'acquisition, si la taille d'une particule est inférieure à la taille d'un pixel du capteur de la caméra alors la taille de cette particule sur l'image est ramenée à la taille de ce pixel. De ce fait, la position réelle de chaque particule est approximée par la position entière du pixel contenant cette particule. On parle alors de sous-échantillonnage des données. Cette approximation de la position peut entraîner une mauvaise estimation du déplacement réel des

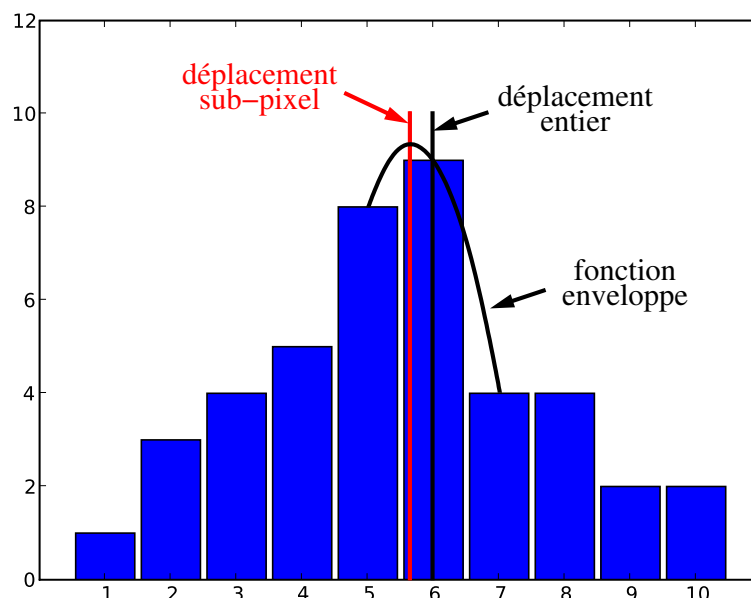
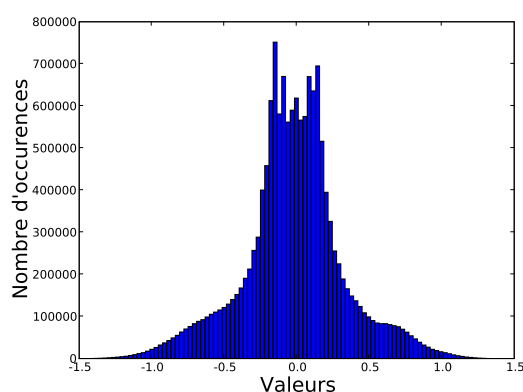
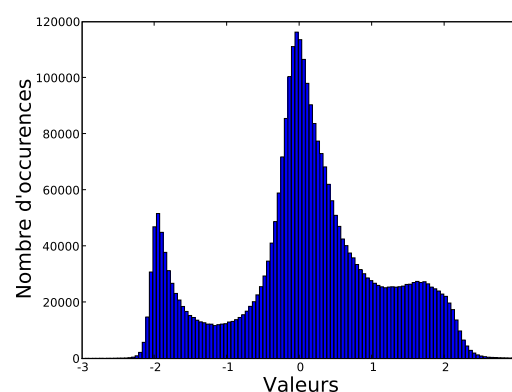


FIGURE 1.4 – Principe de l'interpolation sub-pixel. Le déplacement est calculé en prenant la valeur maximale de la fonction continue interpolant le pic de corrélation.

particules. Ce biais de mesure est appelé *forçage de pic* ou *peak-locking*. Dans ce cas, la précision de l'interpolation sub-pixel est très faible. Ce phénomène peut être identifié en étudiant les histogrammes des composantes de l'ensemble des vecteurs de la séquence. Des pics anormalement élevés apparaissent alors sur certaines valeurs entières (cf. FIGURE 1.5). Pour limiter ce problème, SUSSET propose de déterminer dynamiquement les points à utiliser pour estimer la fonction-enveloppe afin d'obtenir une répartition symétrique de ces points [Susset 02]. La précision de cette méthode est alors de l'ordre d'un dixième de pixel.



(a) - Pas de forçage de pics



(b) - Forçage de pics

FIGURE 1.5 – Le problème du forçage de pic peut être détecté en étudiant la distribution de chaque composante pour l'ensemble des vecteurs de la séquence. Par exemple, en (a) - aucun pic significatif n'apparaît sur les valeurs entières : le problème de forçage de pics n'est pas présent alors qu'en (b) - des pics apparaissent sur les valeurs entières -2 et 0 : le problème de forçage de pics est présent.

### Amélioration de la méthode

Dans certains cas, il peut être difficile d'identifier précisément le pic de corrélation. Pour améliorer sa dynamique, certains auteurs proposent des algorithmes effectuant le traitement en plusieurs itérations. Tout d'abord, la méthode précédente est effectuée afin d'obtenir une première approximation du déplacement. L'algorithme est alors de nouveau exécuté mais la zone de recherche est déplacée en fonction de la position du pic estimée lors de la première itération. On parle alors de méthode d'estimation avec décalage de fenêtres ou méthode avec prédicteurs [Scarano 99, Lecordier 97]. Pour améliorer la résolution des champs de déplacement, certains auteurs proposent d'utiliser la méthode précédente en diminuant la taille des fenêtres après chaque itération. Ce principe permet d'obtenir des tailles de fenêtres réduites, et donc des champs de déplacement de tailles supérieures, tout en gardant des pics de corrélation importants, c'est-à-dire fournissant une bonne mesure de confiance. On parle alors de méthode d'estimation avec fenêtrage adaptatif [Scarano 99]. Une autre méthode consiste à tourner ou à déformer les fenêtres initiales plutôt que d'utiliser des fenêtres rectangulaires alignées sur les axes. Cette méthode permet notamment de rechercher des déplacements d'ordre supérieur à 1. On parle alors de méthodes avec fenêtres déformables [Scarano 02].

Dans [Druon 06b], nous proposons une méthode destinée à améliorer la précision des champs de déplacement dans le cas de séquences résolues dans le temps<sup>1</sup>. Pour cela, nous calculons la corrélation entre deux images. Le choix des images est alors déterminé, pour chaque point du champ, en fonction de la dynamique de l'écoulement au point considéré. Les grands déplacements sont estimés en utilisant des images proches temporellement. Les petits déplacements sont estimés en utilisant des images plus éloignées dans le temps afin d'obtenir une meilleure dynamique et donc de faire ressortir le pic de corrélation.

### 1.2.2 Méthodes différentielles

Les méthodes différentielles d'extraction du mouvement ont pour principe d'étudier les variations des intensités lumineuses de la séquence au cours du temps. Pour cela, ces méthodes considèrent que la quantité totale des intensités lumineuses ne varie pas au cours du temps. Cette hypothèse de conservation de la luminance peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dI}{dt} = 0 \quad (1.2)$$

avec  $I(x_1, x_2, t)$  la fonction représentant le niveau de gris du pixel de coordonnées  $(x_1, x_2)$  à l'instant  $t$ . En utilisant un développement de Taylor à l'ordre 1, l'équation (1.2) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\nabla I \cdot \vec{v} + I_t = 0 \quad (1.3)$$

avec  $\nabla I$  le gradient de l'image,  $\vec{v}$  un vecteur du champ et  $I_t$  la dérivée partielle de  $I$  selon  $t$ . Cette équation est appelée *équation de contrainte du mouvement apparent*. Par définition, la résolution de cette équation est un problème mal posé. En effet, on cherche deux inconnues  $\vec{v} = (v_{x_1}, v_{x_2})^T$  à partir d'une seule équation. Ce problème est connu sous le nom de *problème d'ouverture*. Nous ne pouvons alors calculer que le mouvement normal aux contours. Pour résoudre ce problème, il est nécessaire d'introduire de nouvelles contraintes sur le champ de déplacement. Nous présentons maintenant différentes approches proposées dans la littérature pour résoudre ce problème.

<sup>1</sup>Une séquence est résolue dans le temps lorsque l'intervalle de temps entre deux images est suffisamment petit pour pouvoir suivre l'évolution des structures qui composent le mouvement.

### Approche globale

Dans [Horn 81, Horn 93], HORN et SCHUNCK ajoutent une contrainte concernant la cohérence spatiale du champ de déplacement. Ils cherchent alors le champ de déplacement résolvant l'équation (1.3) tel que ses dérivées spatiales  $\nabla \vec{v}$  soient les plus faibles possibles. Cela revient à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\iint_{\Omega} (\nabla I \cdot \vec{v} + I_t)^2 + \lambda^2 (\|\nabla v_{x_1}\|_2^2 + \|\nabla v_{x_2}\|_2^2) \, d_{x_1} d_{x_2} \quad (1.4)$$

avec  $\lambda$  un coefficient permettant de pondérer l'influence de cette nouvelle contrainte. L'algorithme proposé par les auteurs est itératif, simple à mettre en œuvre et converge vers la solution. Pour chaque itération  $n$ , le champ de déplacement est alors calculé de la façon suivante :

$$\begin{cases} v_{x_1}^{n+1} = \bar{v}_{x_1}^n - \frac{I_{x_1}(I_{x_1}\bar{v}_{x_1}^n + I_{x_2}\bar{v}_{x_2}^n + I_t)}{\alpha^2 + I_{x_1}^2 + I_{x_2}^2} \\ v_{x_2}^{n+1} = \bar{v}_{x_2}^n - \frac{I_{x_2}(I_{x_1}\bar{v}_{x_1}^n + I_{x_2}\bar{v}_{x_2}^n + I_t)}{\alpha^2 + I_{x_1}^2 + I_{x_2}^2} \end{cases} \quad (1.5)$$

où  $\bar{v}_{x_1}^n$  et  $\bar{v}_{x_2}^n$  désignent respectivement la moyenne des voisins de  $v_{x_1}$  et  $v_{x_2}$  à l'itération  $n$ ,  $I_{x_1}$  et  $I_{x_2}$  les dérivées spatiales selon  $x_1$  et  $x_2$  de  $I$  et  $\alpha$  une constante réelle. Cette nouvelle contrainte permet donc de résoudre le problème d'ouverture mais elle ne permet pas d'obtenir des champs de déplacement présentant des discontinuités.

Ce type d'approche est à l'origine d'un grand nombre de travaux. En posant certaines contraintes physiques sur la régularité du champ de déplacement, cette approche permet alors d'extraire le mouvement contenu dans des séquences représentant des écoulements fluides [Suter 94, Mémin 99, Corpetti 02, Ruhnau 05, Corpetti 06, Heitz 08, Liu 08].

### Approche locale

Pour résoudre le problème d'ouverture, LUCAS et KANADE proposent de déterminer le déplacement d'un pixel en fonction des pixels voisins [Lucas 81, Lucas 84]. Pour cela, ils proposent de minimiser :

$$\sum_{\omega \in \Omega} W^2(\omega) \cdot (\nabla I \cdot \vec{v} + I_t)^2 \quad (1.6)$$

avec  $\Omega$  le voisinage le plus petit possible et  $W(\omega)$  une fonction de poids permettant de donner plus d'influence aux informations situées au centre qu'au bord du voisinage. Le champ de déplacement est alors obtenu en résolvant le système :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum W(I_{x_1}^2) & \sum W(I_{x_1}I_{x_2}) \\ \sum W(I_{x_1}I_{x_2}) & \sum W(I_{x_2}^2) \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} v_{x_1} \\ v_{x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum W(I_{x_1}I_{x_3}) \\ \sum W(I_{x_2}I_{x_3}) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Si le problème d'ouverture est toujours présent, les auteurs proposent de recommencer le processus en considérant un voisinage plus important. Certains auteurs montrent que cette méthode permet d'obtenir une représentation du mouvement avec des temps de calcul faibles [Galvin 98, Liu 98]. Par contre, dans certains cas, l'inversion de la matrice  $A$  peut être impossible ou instable.

### Étude du tenseur de structure

Une autre méthode d'extraction du mouvement est basée sur l'étude des tenseurs de structure [Nagel 86, Bigün 87, Spies 01, Brox 02b]. Soit  $\nabla I = (I_{x_1}, I_{x_2}, I_t)^T$  le gradient des intensités lumineuses d'un pixel. Le tenseur de structure  $J$  de ce pixel est alors une matrice symétrique définie positive calculée de la façon suivante :

$$J = G_\rho * (\nabla I \otimes \nabla I) = \begin{pmatrix} I_{x_1}^2 & I_{x_1}I_{x_2} & I_{x_1}I_t \\ I_{x_1}I_{x_2} & I_{x_2}^2 & I_{x_2}I_t \\ I_{x_1}I_t & I_{x_2}I_t & I_t^2 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

avec  $G_\rho$  un noyau gaussien d'écart-type  $\rho$ . On calcule alors les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  et les vecteurs propres associés  $\vec{\nu}^1 = (\nu_{x_1}^1, \nu_{x_2}^1, \nu_t^1)^T$ ,  $\vec{\nu}^2 = (\nu_{x_1}^2, \nu_{x_2}^2, \nu_t^2)^T$  et  $\vec{\nu}^3 = (\nu_{x_1}^3, \nu_{x_2}^3, \nu_t^3)^T$  de ce tenseur de structure. L'étude des valeurs propres triées par ordre décroissant ( $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ ) permet alors de déterminer le mouvement de ce pixel. Quatre cas sont possibles :

- $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_3 \approx 0$  : il n'existe pas de structure. Il n'y a pas de variation des niveaux de gris dans le voisinage : aucun mouvement ne peut être estimé.
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 \approx \lambda_3 \approx 0$  : il existe un ensemble de solutions. L'information contenue dans le voisinage n'est pas suffisante pour extraire le mouvement réel. On peut malgré tout extraire le mouvement normal de la façon suivante :

$$\vec{v}_n = -\frac{\nu_t^1}{(\nu_{x_1}^1)^2 + (\nu_{x_2}^1)^2} \cdot \begin{pmatrix} \nu_{x_1}^1 \\ \nu_{x_2}^1 \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

- $\lambda_1 > \lambda_2 > 0, \lambda_3 \approx 0$  : il existe une solution unique. Le voisinage contient suffisamment d'informations pour résoudre le problème d'ouverture. Le mouvement réel est alors obtenu de la façon suivante :

$$\vec{v} = \frac{1}{\nu_t^3} \cdot \begin{pmatrix} \nu_{x_1}^3 \\ \nu_{x_2}^3 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

- $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$  : il n'existe pas de mouvement cohérent. Il y a une discontinuité du mouvement : aucun déplacement cohérent ne peut être déterminé.

Cette méthode permet d'extraire, pour chaque pixel, le mouvement associé. Afin de régulariser le champ de déplacement obtenu, il peut être intéressant d'effectuer un lissage de ce champ en utilisant des processus de diffusion [Weickert 99, Brox 02a].

Dans [Druon 06b], nous proposons d'extraire le mouvement contenu dans des séquences représentant des écoulements fluides par une méthode de flot optique basée sur l'étude des tenseurs de structures. Pour cela, nous calculons le mouvement de chaque pixel à partir de son tenseur de structure. Pour résoudre le problème d'ouverture, nous utilisons un processus itératif de diffusion tel que présenté dans [David 05b]. Nous appliquons notre méthode sur une séquence représentant un écoulement au sein d'une cavité rigide (cette séquence est étudiée plus en détail au chapitre 4). Comme le montre la FIGURE 1.6, notre méthode permet alors de retrouver les principales structures de l'écoulement mais des problèmes subsistent sur l'estimation de la norme de chaque vecteur.

### Autres méthodes

Dans [Bruhn 05], les auteurs proposent de combiner la méthode proposée par HORN et SCHUNCK [Horn 81] et celle proposée par LUCAS et KANADE [Lucas 81] afin de déterminer le



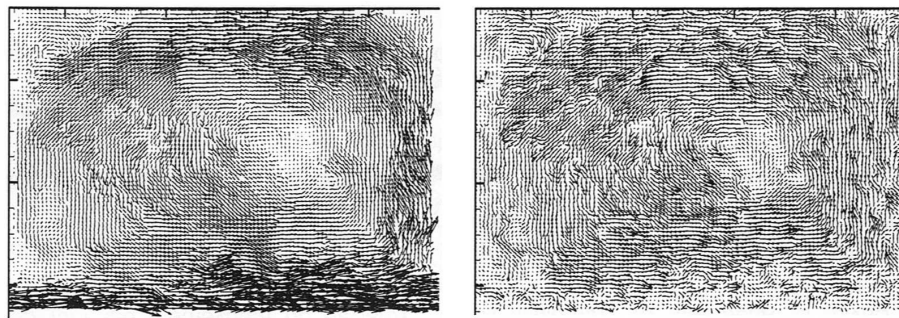


FIGURE 1.6 – *Comparaison des résultats obtenus en utilisant une méthode par corrélation (à gauche) et une méthode par flot optique (à droite). Les deux méthodes utilisées sont présentées dans [Druon 06b].*

champ de déplacement. Cette méthode fournit des champs de déplacement denses tout en étant robuste au bruit Gaussien. Les auteurs proposent alors de calculer ces champs de déplacement en utilisant une approche non-linéaire et multirésolution.

Dans [Quénot 98], QUÉNOT *et al.* proposent de rechercher un champ de déplacement continu et régulier qui minimise globalement la distance  $L_1$  ou la distance  $L_2$  entre deux images. La recherche d'un tel champ étant un problème coûteux en temps de calcul, les auteurs proposent de découper les champs multi-dimensionnels en bandes mono-dimensionnelles. L'estimation de ces différentes bandes est alors effectuée par un algorithme de programmation dynamique [Sakoe 78].

Certains auteurs proposent d'estimer les champs de déplacement en utilisant des modèles de mouvement prédéfinis. Dans [Bergen 92], BERGEN *et al.* proposent d'estimer le mouvement contenu entre deux images en utilisant une approche hiérarchique. Tout d'abord, les auteurs construisent des pyramides d'images représentant les images à différentes résolutions. Ils estiment alors les paramètres de leur modèle en utilisant une minimisation de Gauss-Newton. À partir de ces paramètres du modèle, ils calculent le champ de déplacement associé et l'utilisent pour déformer les images initiales. Le processus multi-résolution est alors répété pour un niveau de définition plus important jusqu'à obtenir le niveau de détail désiré. Les auteurs proposent, comme exemple, quatre modèles différents : un modèle affine, un modèle représentant une surface plane, un modèle de corps humain et un modèle générique. Dans [Odobez 95], ODOBEZ et BOUTHEMY proposent une méthode permettant d'extraire les mouvements paramétriques contenus dans une séquence d'images. Pour cela, ils contraignent le processus d'estimation du mouvement en imposant la recherche d'un mouvement paramétrique de complexité définie (constant, affine, quadratique...). Ils recherchent alors les paramètres de ce modèle paramétrique par une méthode multi-résolution basée sur la résolution d'un problème de minimisation utilisant des M-estimateurs robustes. Le choix de la complexité du modèle paramétrique, et donc du nombre de paramètres à estimer, conditionne alors la complexité du mouvement recherché.

Nous venons de présenter différentes méthodes d'extraction du mouvement. Une différence majeure entre les méthodes d'estimation par corrélation et les méthodes par flot optique concerne la taille des champs de déplacement obtenus. En effet, avec les méthodes par corrélation, la taille des champs est directement liée à la taille des fenêtres. Même si les conditions d'acquisition permettent d'utiliser des fenêtres de tailles réduites, la taille de ces champs reste inférieure à celle obtenue par une méthode de type flot optique capable de fournir un vecteur par

pixel. Dans ce mémoire, nous ne nous soucions pas du problème d'estimation du mouvement. Nous supposons simplement que les champs de déplacement à traiter sont réguliers.

### 1.3 Modélisation des champs de déplacements

Nous étudions maintenant différentes méthodes permettant de modéliser les champs de déplacement issus de la phase d'extraction. Le choix du modèle à utiliser est alors conditionné par différents paramètres tels que le type de solution souhaité ou le domaine d'application du problème.

Un premier domaine concerne l'étude du corps humain. Certains auteurs cherchent alors à modéliser les différentes actions couramment exécutées telles que la marche, la course ou le saut. GAVRILA dresse un état de l'art des différentes méthodes destinées à modéliser ces mouvements [Gavrila 99]. D'autres travaux s'intéressent plus particulièrement à la modélisation d'une partie du corps telle que le visage ou la bouche. Des travaux portent également sur l'étude du comportement humain dans son environnement. On cherche alors à détecter certaines actions spécifiques telles que les déplacements d'un individu dans une foule, les comportements suspects ou les mouvements de chute d'une personne. Dans [Druon 06a], nous proposons de modéliser et d'interpréter les mouvements de tête d'un individu situé devant une webcam. Nous revenons plus en détail sur cette problématique dans le chapitre 3.

Un autre domaine de recherche concerne l'étude des écoulements fluides pour des applications telles que la météorologie, l'industrie automobile ou l'aéronautique. Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes permettent de représenter les différents phénomènes étudiés. Mais devant la quantité de données à traiter ou la précision demandée, la résolution directe de ces équations aux dérivées partielles est délicate. Il peut donc être intéressant de trouver un modèle simplifié permettant de résoudre le problème considéré.

Nous cherchons donc un modèle permettant de représenter les champs de déplacement réguliers. Une première approche consiste à utiliser des modèles probabilistes [Fablet 01, Fablet 03, Piriou 05]. D'autres auteurs proposent de modéliser le mouvement en utilisant des modèles paramétriques. Parmi ces modèles paramétriques, les modèles polynomiaux sont souvent utilisés pour représenter des mouvements de faible complexité [Stiller 99]. Par exemple, les modèles polynomiaux constants, affines ou quadratiques permettent de représenter des mouvements simples en un nombre limité de paramètres. Ces modèles sont donc intéressants pour faire de la compression de données [Zaharia 01]. Ils sont également utilisés pour représenter les mouvements de caméra. Nous revenons plus en détail sur ce problème de détermination des mouvements de caméra au chapitre 3. Par contre, ils ne permettent pas d'obtenir une représentation précise de mouvements complexes. Une autre approche consiste alors à modéliser le mouvement par des séries de fonctions. Notre méthode repose sur ce principe. Nous l'étudions donc plus en détail maintenant.

#### 1.3.1 Modélisation du mouvement par séries de fonctions

Nous souhaitons donc modéliser tout type de mouvement par des combinaisons linéaires de fonctions. La forme générale d'un tel modèle est alors la suivante :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i \quad (1.11)$$

L'évaluation de ce modèle s'articule autour de trois problèmes :

- le choix des fonctions  $\phi_i$  ;
- l'estimation des paramètres  $c_i$  ;
- le choix du nombre de paramètres  $N$ .

Le premier point conditionne en grande partie le type de modèle obtenu. Deux cas sont alors possibles : les fonctions  $\phi_i$  sont déterminées *a posteriori* en fonction de chaque mouvement ou ces fonctions sont fixées *a priori* sans connaissance du mouvement.

### Détermination *a posteriori* des fonctions $\phi_i$

Une méthode fréquemment utilisée en vision assistée par ordinateur pour déterminer ces fonctions  $\phi_i$ , aussi appelées *modes*, consiste à effectuer une *analyse en composantes principales* (Principal Component Analysis - PCA) [Jolliffe 02, Lebart 95]. Cette méthode est également connue sous le nom de *transformée de Hotelling* [Hotelling 33] ou *décomposition de Karhunen-Loève* [Loève 94]. Elle est intimement liée à la *décomposition en valeurs singulières* (Singular Value Decomposition - SVD) [Golub 65, Golub 70, Golub 96, Stewart 93, Gerbrands 81]. Dans le domaine de la mécanique des fluides, cette méthode est communément appelée *décomposition orthogonale aux valeurs propres* (Proper Orthogonal Decomposition - POD). Nous présentons maintenant le principe de cette méthode.

La décomposition orthogonale aux valeurs propres est une méthode d'analyse de données permettant de modéliser des phénomènes non-linéaires multivariés à partir d'un ensemble de réalisations instantanées. Pour cela, cette méthode exprime le phénomène à étudier comme une combinaison linéaire des vecteurs propres issus de la matrice des corrélations entre ces différentes réalisations. Nous nous contentons ici de faire une présentation simplifiée de cette méthode. Pour plus d'informations, nous renvoyons aux nombreux articles déjà existants [Lumley 67, Sirovich 87, Sirovich 89, Holmes 98, Delville 99, Cordier 02a, Cordier 02b].

Soit  $\{\mathcal{F}\}$  l'ensemble des réalisations du phénomène à étudier. Ces réalisations peuvent provenir de simulation numériques ou de mesures expérimentales et peuvent représenter différentes variables telles que des champs de déplacements, des mesures de température ou des mesures de pression, effectuées selon différents paramètres tels que le temps ou le nombre de Reynolds. Dans la suite de ces travaux, nous nous limitons à l'étude de l'évolution temporelle des champs de déplacement. L'ensemble des réalisations peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\{\mathcal{F}(\vec{x}, t), \quad (\vec{x}, t) \in \mathbf{D} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{N}^+\} \quad (1.12)$$

avec  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega$  les coordonnées spatiales de dimension  $d$  définies dans le domaine  $\Omega$ ,  $t \in [1; N]$  la composante temporelle et  $N$  le nombre de réalisations. Nous cherchons donc les modes spatiaux  $\phi_n(\vec{x})$  et les coefficients  $c_n(t)$  tels que :

$$\mathcal{F}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t) \cdot \phi_n(\vec{x}) \quad (1.13)$$

Pour cela, nous calculons la matrice de corrélation  $K$  associées aux données initiales de la façon suivante :

$$K_{i,j} = \langle \mathcal{F}(\vec{x}, i) \mid \mathcal{F}(\vec{x}, j) \rangle \quad \forall i, j \in [1; N]^2 \quad (1.14)$$

L'opérateur  $\langle . \mid . \rangle$  correspond au produit scalaire entre deux fonctions défini ainsi :

$$\langle \mathcal{F}(\vec{x}, i) \mid \mathcal{F}(\vec{x}, j) \rangle = \int_{\Omega} \mathcal{F}^*(\vec{x}, i) \mathcal{F}(\vec{x}, j) d\vec{x} \quad (1.15)$$

avec  $\mathcal{F}^*(\vec{x}, t)$  le complexe conjugué de  $\mathcal{F}(\vec{x}, t)$ . Nous déterminons alors les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ , triées par ordre décroissant, et les vecteurs propres associés  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$  de cette matrice de corrélation  $K$ . Les modes  $\phi(\vec{x}, t)$  sont alors déterminés de la façon suivante :

$$\forall i \in [1; N] \quad \phi(\vec{x}, i) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Psi_i(n) \cdot \mathcal{F}(\vec{x}, n) \quad (1.16)$$

avec  $\Psi_i(n)$  la  $n$ -ième composante du vecteur propre associé à la  $i$ -ième valeur propre et  $N$  le nombre de réalisations. La contribution de chaque mode est donnée par la valeur propre associée. Les coefficients  $c_i(t)$  du modèle paramétrique correspondent alors aux différents vecteurs propres :

$$\forall i \in [1; N] \quad c_i(t) = \Psi_i \quad (1.17)$$

Ces coefficients sont généralement appelés *coefficients temporels*. Par exemple, la FIGURE 1.7 montre trois champs de déplacement extraits de la séquence « cylindre-carré ». La FIGURE 1.8 représente les trois modes les plus énergétiques issus de la décomposition orthogonale aux valeurs propres. La FIGURE 1.9 représente l'évolution des coefficients temporels associés à ces trois modes propres.

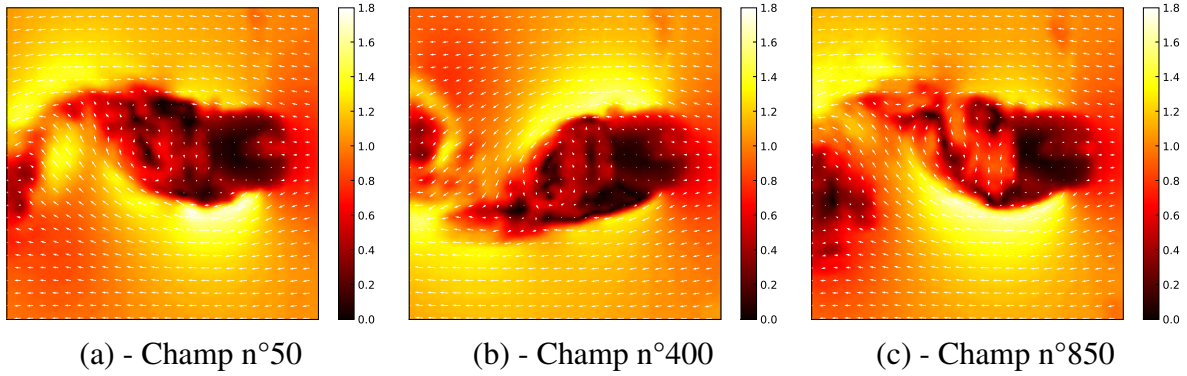


FIGURE 1.7 – Champs de déplacement extraits de la séquence « cylindre-carré ». Cette séquence est étudiée plus en détail au chapitre 4.

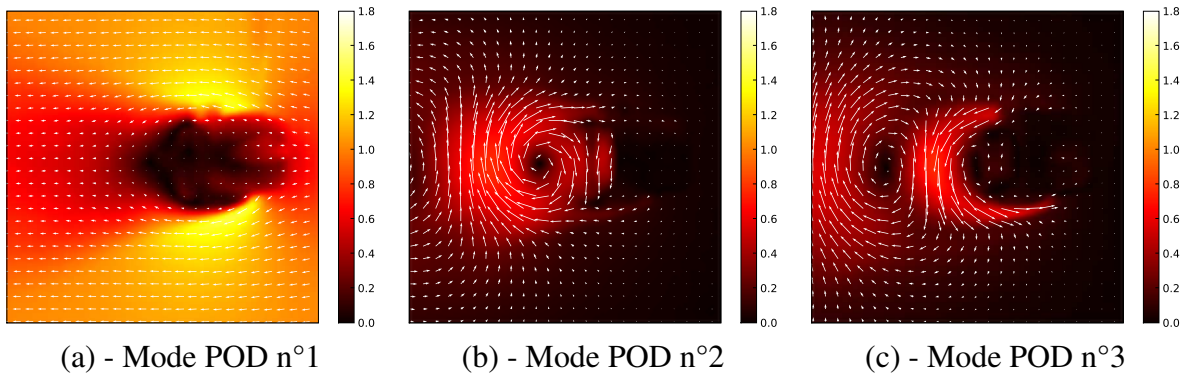


FIGURE 1.8 – Représentation des trois premiers modes obtenus par une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) sur la séquence « cylindre-carré ». Cette séquence est étudiée plus en détail au chapitre 4.

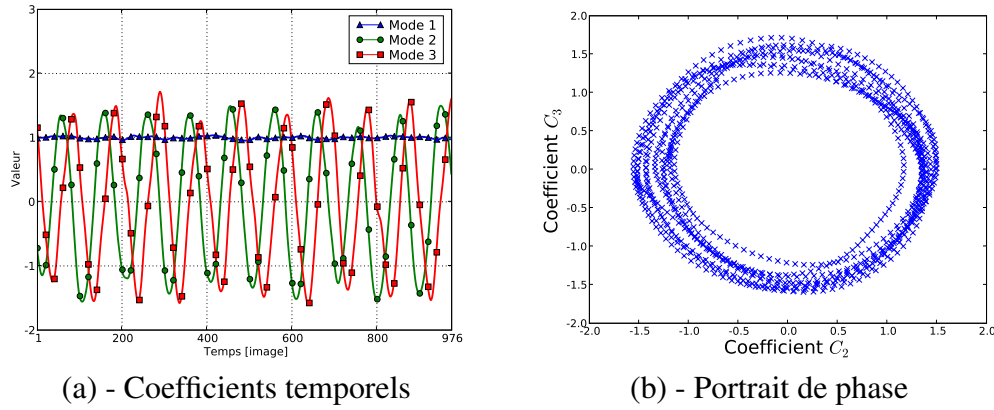


FIGURE 1.9 – (a) - évolution des trois premiers coefficients temporels issus d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) sur la séquence « cylindre-carré » et (b) - portrait de phase entre les deuxième et troisième coefficients temporels issus d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) sur la séquence « cylindre-carré ». Cette séquence est étudiée plus en détail au chapitre 4.

Cette décomposition orthogonale aux valeurs propres induit quelques propriétés au modèle. Par exemple, les modes  $\phi(\vec{x})$  sont, par définition, orthogonaux deux à deux. De plus, ces fonctions sont optimales selon la norme euclidienne dans le sens où il n'existe pas d'autre décomposition du même ordre contenant une quantité d'énergie cinétique équivalente. Le nombre de paramètres à utiliser pour représenter le processus physique est alors le plus petit possible. Cette méthode permet donc une réduction importante des données. Une autre propriété de cette méthode concerne la réorganisation temporelle des données. En effet, si les champs de déplacement sont mélangés temporellement, il est alors possible de les réorganiser en étudiant les portraits de phase des différents coefficients temporels  $c_n(t)$ . Par exemple, la FIGURE 1.9-(b) présente le portrait de phase entre les coefficients  $c_2$  et  $c_3$  issus de la décomposition orthogonale aux valeurs propres de la séquence « cylindre-carré ». Sur cette figure, chaque point correspond à un champ de la séquence. L'organisation circulaire de ces points traduit un mouvement périodique. À partir de cette représentation, il est alors possible de repositionner dans le temps les différents champs de déplacement. Par contre, un inconvénient de la décomposition orthogonale aux valeurs propres concerne l'interprétation physique des différents modes  $\phi(\vec{x})$ . En effet, il est généralement difficile, voire impossible, de leur donner un sens physique. De plus, par définition, ces modes sont propres à chaque écoulement. Il est donc délicat d'utiliser ce modèle pour comparer plusieurs séquences.

Les équations de Navier-Stokes permettent de décrire les écoulements fluides mais la résolution directe de ces équations aux dérivées partielles est un problème complexe. Une manière de simplifier ce problème consiste alors à réécrire le système original en un système plus simple composé d'équations aux dérivées ordinaires. Cette réécriture peut se faire en projetant ces équations de Navier-Stokes sur une base orthogonale, via une projection de Galerkin. Comme nous l'avons précisé, la décomposition orthogonale aux valeurs propres fournit une représentation optimale au sens de l'énergie cinétique. La projection des équations de Navier-Stokes sur la base orthogonale issue de cette décomposition permet alors de concevoir un système dynamique d'ordre réduit préservant au mieux la dynamique de l'écoulement. On parle alors de *méthode POD-Galerkin* [Cordier 02b, Bergman 04, Perret 04]. Ces systèmes dynamiques d'ordre réduit sont de plus en plus utilisés, notamment dans des applications où le temps de calcul est limité comme, par exemple, pour des applications de contrôle.

Dans [Fleet 00], FLEET *et al.* proposent d'utiliser une analyse en composante principale lorsqu'aucun modèle analytique correspondant au problème traité n'est disponible. Par exemple, ils utilisent cette méthode pour modéliser les mouvements de la bouche. Pour cela, ils effectuent une analyse en composantes principales sur 3 000 champs de déplacement représentant un utilisateur prononçant les mots « center », « track », « release » ou « print ». Ils constatent alors que 91,4 % de l'information est contenue dans les sept premiers modes. Au final, ils utilisent cette méthode pour reconnaître ces quatre mots parmi d'autres. Ces travaux s'intègrent dans le projet *Perceptual Browser* [Black 98] qui vise à piloter différentes applications, telles qu'un navigateur Internet, en étudiant le comportement de l'utilisateur devant l'ordinateur. Les auteurs proposent d'utiliser la même méthode pour détecter différents mouvements de marche. Dans ce cas, ils étudient un mouvement simple mais sous différentes conditions d'acquisition telles que l'illumination de la scène, la position de la caméra, les vêtements portés par le sujet ou la vitesse de la marche. Ils constatent alors que 90 % de l'information est contenue dans les neuf premiers modes. Ils se servent alors de leur modèle pour détecter l'instant où le sujet a effectué un cycle de marche complet.

Chandrashekara *et al.* proposent d'utiliser la même méthode pour modéliser le mouvement du cœur humain [Chandrashekara 03]. Après avoir calculé les champs de déplacement à partir d'images obtenues par raisonnances magnétiques (IRM), les auteurs effectuent une analyse en composantes principales sur ces champs afin d'établir un modèle de mouvement du cœur. Avec cette approche, les auteurs souhaitent comparer les mouvements cardiaques de différents individus dans le but de déterminer si un patient présente certaines anomalies tels que l'hypertrophie cardiaque.

### Détermination *a priori* des fonctions $\phi_i$

Un premier modèle consiste à utiliser comme fonctions  $\phi_i$  un ensemble de monômes. Dans ce cas, la modélisation du mouvement se ramène à un problème d'interpolation polynomiale. Comme nous l'avons évoqué précédemment, cette approche est intéressante lorsque la complexité du mouvement à modéliser est relativement faible. Si le mouvement est complexe ou que la résolution des champs de déplacement est importante, il peut alors être délicat d'estimer les différents paramètres du modèle car cette méthode est sensible au bruit et, selon les polynômes utilisés, ne converge pas tout le temps vers la solution.

Dans [Bruno 00, Bruno 01a], BRUNO propose d'effectuer une modélisation globale du mouvement par des séries de Fourier. Les champs de déplacement sont alors représentés par des combinaisons linéaires d'exponentielles complexes. L'expression générale du mouvement est la suivante :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \sum_{l=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} c_{k,l}(t) \phi_{k,l}(\vec{x}) \quad (1.18)$$

avec  $\phi_{k,l}(\vec{x}) = e^{i2\pi(k\frac{1}{S_{i_1}}x_1 + l\frac{1}{S_{i_2}}x_2)}$  les différentes harmoniques de taille  $S_{i_1} \times S_{i_2}$ . Le nombre  $N$  permet de déterminer la complexité du modèle. Il conditionne directement le nombre de paramètres  $p$  du modèle par la relation  $p = 2(N + 1)^2$ . Si le nombre  $N$  est faible alors seules les harmoniques basses fréquences sont générées. Dans ce cas, le modèle fournit une approximation lissée du mouvement. Pour obtenir une modélisation plus précise, en particulier pour représenter les contours, il est alors nécessaire d'utiliser un nombre  $N$  plus important afin de générer des harmoniques de fréquences plus élevées. Une représentation des 25 premières harmoniques

( $N = 4$ ) est présentée FIGURE 1.10. L'estimation des coefficients de Fourier est effectuée en utilisant la méthode des moindres-carrés pondérés itérés. Si le mouvement à modéliser est complexe, le modèle doit alors contenir des harmoniques de fréquences élevées. Comme ces harmoniques modélisent des variations spatiales rapides, et donc localisées, l'estimation directe des paramètres du modèle peut ne pas être stable si la séquence contient des mouvements de grandes amplitudes. Pour résoudre ce problème, l'auteur propose alors d'utiliser une approche multirésolution. Tout d'abord, il effectue une première estimation des paramètres en utilisant un modèle basse fréquence puis le processus est répété en augmentant à chaque itération la complexité du modèle. Finalement, l'auteur évalue la qualité de ce modèle sur des séquences synthétiques et réelles, en prenant  $N = 4, 6$  ou  $8$ . Les résultats montrent qu'il est possible d'obtenir une première approximation du mouvement mais, d'après l'auteur, le modèle ne semble pas adapté à la représentation de certains mouvements simples tels que les mouvements affines.

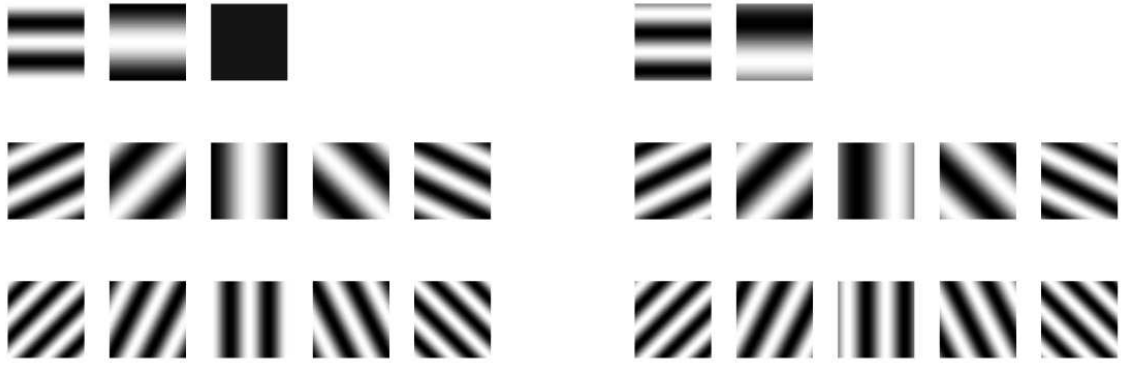


FIGURE 1.10 – Représentation des 25 premières harmoniques paires et impaires ( $N = 4$ ). Image extraite de [Bruno 01a].

Pour résoudre ce problème, BRUNO propose de modéliser le mouvement par des séries d'ondelettes B-splines [Bruno 01a, Bruno 01b]. La fonction B-spline monodimensionnelle  $\Psi$  de degré  $N$  définie au niveau de résolution 0 s'écrit :

$$\Psi_0^N(x) = \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} (-1)^k (x-k)_+^N \quad (1.19)$$

avec :

$$x_+^n = \begin{cases} x^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.20)$$

Cette fonction a pour support  $[0; N+1]$ . Elle est définie au niveau de résolution  $j$  de la façon suivante :

$$\Psi_{j,k}^N(x) = \Psi_0^N(2^j x - k) \quad (1.21)$$

avec  $k$  un facteur de translation permettant de dilater la fonction afin qu'elle soit définie sur tout le signal. Les fonctions bidimensionnelles  $\phi_{j,k_1,k_2}^N$  constituant la base orthogonale sont alors obtenues de la façon suivante :

$$\phi_{j,k_1,k_2}^N(x_1, x_2) = \Psi_{j,k_1}^N(2^j x_1 - k_1) \Psi_{j,k_2}^N(2^j x_2 - k_2) \quad (1.22)$$

Une représentation de deux bases de fonctions B-splines cubique ( $N = 3$ ) pour les niveaux de résolution  $j = 2$  et  $j = 3$  est donnée FIGURE 1.11. La forme générale de la solution est alors la suivante :

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \sum_{k_1=0}^{2^j-1} \sum_{k_2=0}^{2^j-1} c_{j,k_1,k_2}(t) \phi_{j,k_1,k_2}^N(\vec{x}) \quad (1.23)$$

L'estimation des paramètres  $c_{j,k_1,k_2}(t)$  s'effectue selon le même procédé que pour l'estimation des paramètres du modèle basé sur les séries de Fourier présenté précédemment. Par contre, dans le cas des ondelettes, le processus multirésolution est directement intégré au modèle. L'auteur montre alors que le degré  $N$  des fonctions B-splines a une grande influence sur la qualité des résultats. En effet, un degré  $N$  élevé permet d'approximer une fonction d'ordre élevé avec une bonne précision. Par contre, si l'ordre de la fonction à modéliser est inférieur au degré  $N$  alors la solution obtenue a tendance à osciller autour de la solution réelle. L'auteur évalue la qualité de ce modèle sur des séquences synthétiques et expérimentales en utilisant des fonctions B-splines de degré  $N = 1, 2$  ou  $3$  pour des niveaux de résolution de  $j = 2, 3$  ou  $4$ . L'aspect multirésolution d'une telle décomposition permet alors de modéliser tout type de mouvement, simple ou complexe, avec une bonne précision. Par contre, les temps de calcul engendrés par cette méthode ne sont pas négligeables, surtout si le degré  $N$  utilisé est élevé. Une approche similaire, basée sur une décomposition en séries d'ondelettes, est proposée WU *et al.* dans [Wu 00].

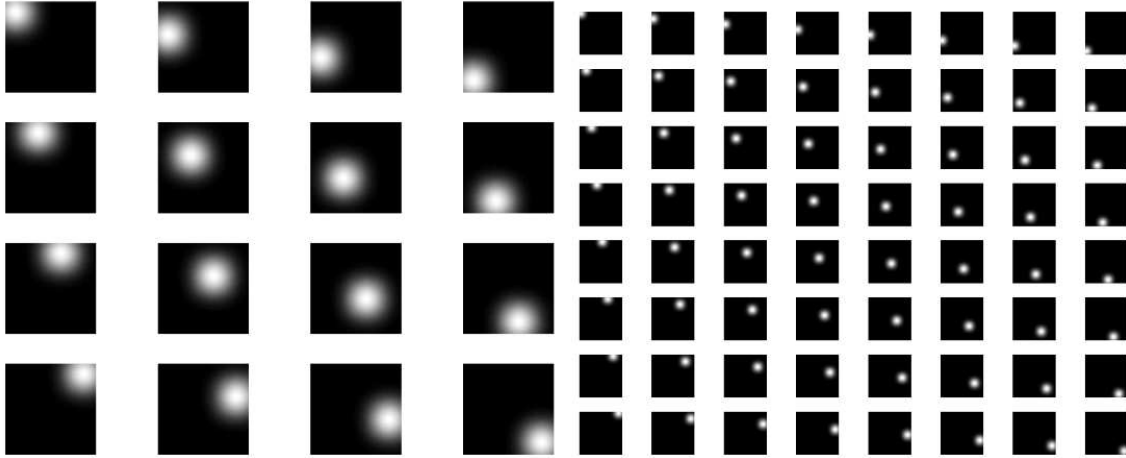


FIGURE 1.11 – Bases de fonctions B-splines cubique pour un niveau de résolution  $j = 2$  (à gauche) et  $j = 3$  (à droite). Image extraite de [Bruno 01a].

Dans [Hoey 00, Hoey 02], HOEY et LITTLE modélisent les champs de déplacement en les projetant sur une base composée des polynômes de Zernike. Ces polynômes, notés  $U_n^m$ , sont exprimés en coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$  :

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad \rho \in [0; 1] \quad \theta \in [0; 2\pi[ \quad (1.24)$$

avec  $x_1$  et  $x_2$  les coordonnées cartésiennes. Ils sont composés d'une fonction radiale  $R_n^m(\rho)$  modulée par une exponentielle complexe :

$$U_n^m(\rho, \theta) = R_n^m(\rho) e^{im\theta} \quad (1.25)$$



La fonction radiale  $R_n^m(\rho)$  est définie de la façon suivante :

$$R_n^m(\rho) = \sum_{l=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^l (n-l)!}{l! [\frac{1}{2}(n+m)-l]! [\frac{1}{2}(n-m)-l]!} \rho^{n-2l} \quad (1.26)$$

avec  $m$  et  $n$  deux entiers tels que  $n \geq m \geq 0$ . Ces polynômes complexes, définis sur le cercle unitaire, forment alors une base orthogonale complète. De ce fait, il est possible d'exprimer une fonction  $f(\rho, \theta)$  comme une combinaison des différents polynômes de Zernike  $U_n^m$  qui composent la base. On peut donc écrire :

$$f(\rho, \theta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (A_n^m \cos(m\theta) + B_n^m \sin(m\theta)) R_n^m(\rho) \quad (1.27)$$

avec  $M$  et  $N$  des paramètres permettant de déterminer le nombre de polynômes à utiliser. Les coefficients  $A_n^m$  et  $B_n^m$  sont alors calculés de la façon suivante :

$$\begin{cases} Au_n^m = \frac{\epsilon_m (n+1)}{\pi} \sum_{x_1} \sum_{x_2} u(x_1, x_2) R_n^m(\rho) \cos(m\theta) \\ Bu_n^m = \frac{\epsilon_m (n+1)}{\pi} \sum_{x_1} \sum_{x_2} u(x_1, x_2) R_n^m(\rho) \sin(m\theta) \\ Av_n^m = \frac{\epsilon_m (n+1)}{\pi} \sum_{x_1} \sum_{x_2} v(x_1, x_2) R_n^m(\rho) \cos(m\theta) \\ Bv_n^m = \frac{\epsilon_m (n+1)}{\pi} \sum_{x_1} \sum_{x_2} v(x_1, x_2) R_n^m(\rho) \sin(m\theta) \end{cases} \quad (1.28)$$

avec  $u(x_1, x_2)$  la fonction représentant les déplacements horizontaux,  $v(x_1, x_2)$  la fonction représentant les déplacements verticaux et  $\epsilon_m$  défini de la façon suivante :

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.29)$$

La FIGURE 1.12 présente quelques exemples de champs de déplacement extraits de la base. Cette décomposition permet de modéliser tout type de mouvement. Les auteurs proposent alors de modéliser les mouvements du visage afin d'interpréter les différentes émotions d'une personne telles que le dégoût, la peur, la joie, la tristesse ou la surprise. Si la tête de la personne reste face à la caméra, les auteurs estiment qu'une base composée de 11 polynômes de Zernike permet de modéliser les cinq expressions précédentes avec un bon niveau de précision.

Dans [Fleet 00], FLEET *et al.* proposent de modéliser des « déplacements caractéristiques génériques ». Les auteurs considèrent comme « déplacements caractéristiques génériques » les déplacements des bords des objets (zones présentant des discontinuités) ainsi que les déplacements d'objets représentant des barres (cf. FIGURE 1.13). Tout d'abord, ils définissent le mouvement d'un pixel de coordonnées  $(x_1, x_2)$  par la fonction  $f(x_1, x_2, u_t, \Delta_u, \theta)$  avec  $u_t$  le vecteur moyen calculé sur un voisinage circulaire,  $\Delta_u$  le changement de vitesse le long du bord ou de la barre et  $\theta$  l'orientation de ce bord ou de cette barre (cf. FIGURE 1.13). Ils cherchent alors les paramètres  $\{c_i\}$  en projetant la fonction  $f$  sur une base composée d'un ensemble de champs de déplacement  $\phi_i(\vec{x})$ . L'expression générale du mouvement est alors de la forme :

$$f(x_1, x_2, u_t, \Delta_u, \theta) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \phi_i(\vec{x}) \quad (1.30)$$

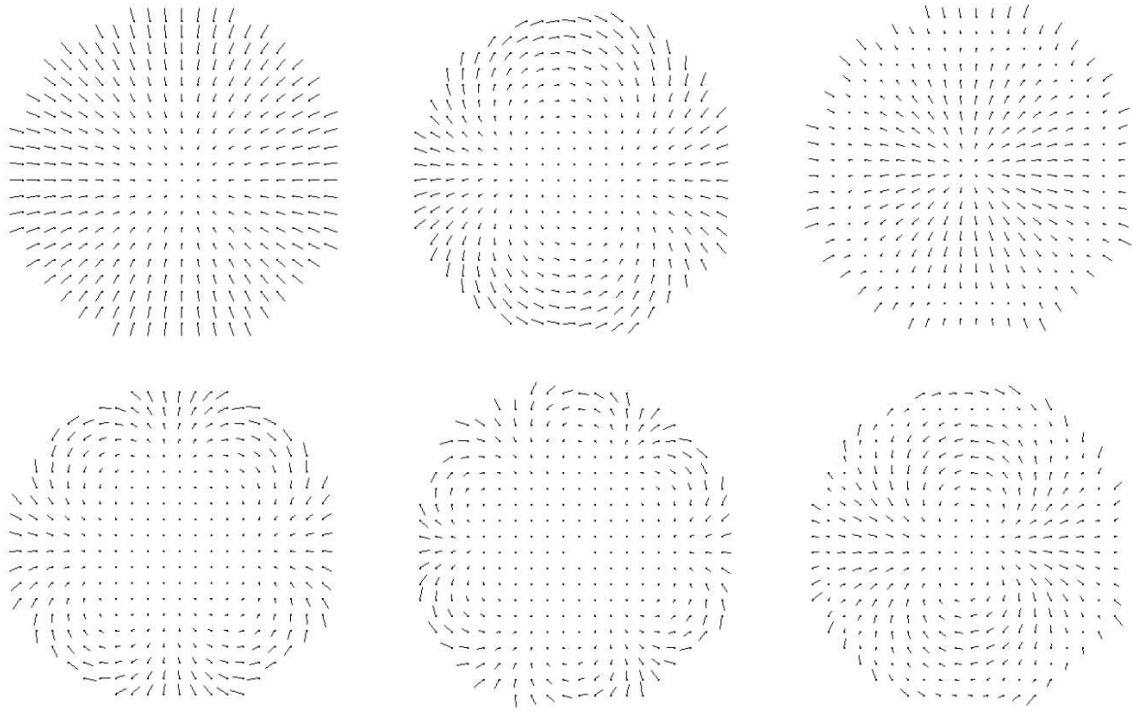


FIGURE 1.12 – Exemple de champs de déplacement extraits d'une base composée des polynômes de Zernike. Image extraite de [Hoey 00].

Les auteurs définissent leur base comme étant une combinaison, via un produit tensoriel, d'une base modélisant la structure spatiale de l'objet étudié (bord ou barre) et d'une base modélisant le déplacement de cet objet. La base spatiale est calculée à partir du type et de la taille de l'objet en utilisant la méthode proposée dans [Perona 95]. Un exemple de base permettant de modéliser la structure spatiale d'un bord est présenté FIGURE 1.14. Un exemple de base permettant de modéliser la structure spatiale d'une barre est présenté FIGURE 1.15. À partir de ces bases spatiales, les auteurs calculent alors les différents champs de déplacement  $\phi_i(\vec{x})$ . Un exemple de champs obtenus est présenté FIGURE 1.16. L'estimation des paramètres  $\{c_i\}$  est effectuée par une méthode multirésolution basée sur celle proposée dans [Black 96]. Le modèle proposé par FLEET *et al.* permet donc de modéliser les discontinuités d'un champ de déplacement. Par contre, les bases spatiales sont dépendantes du type et de la taille des objets traités.

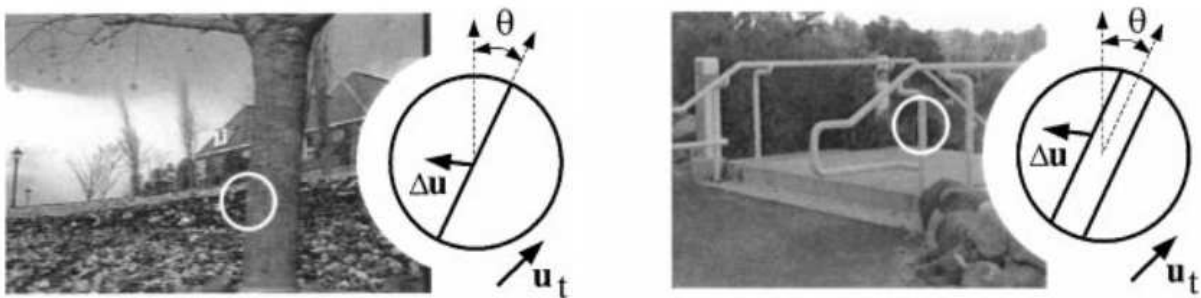


FIGURE 1.13 – Exemple de « déplacements caractéristiques ». Image extraite de [Fleet 00].

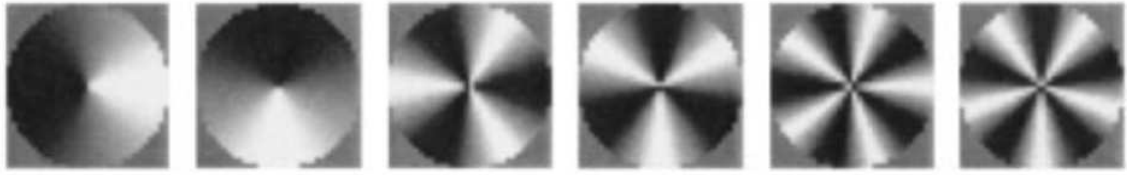


FIGURE 1.14 – Exemple de base permettant de modéliser la structure spatiale d'un bord. Image extraite de [Fleet 00].

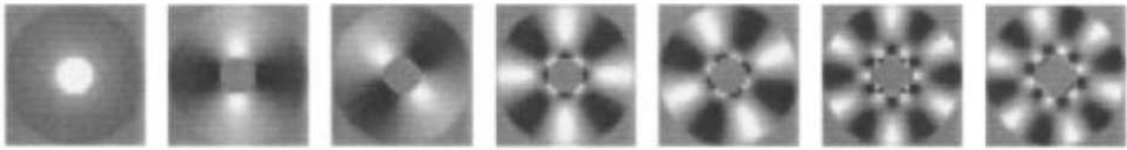


FIGURE 1.15 – Exemple de base permettant de modéliser la structure spatiale d'une barre. Image extraite de [Fleet 00].

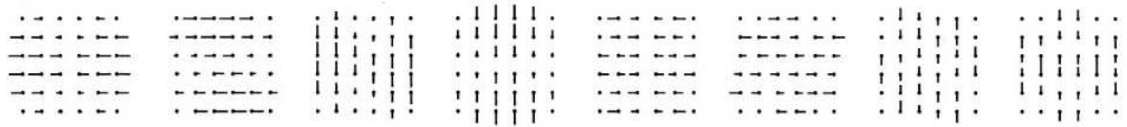


FIGURE 1.16 – Exemple de champs de déplacement constituant la base. Image extraite de [Fleet 00].

Dans [Park 04], PARK *et al.* proposent une méthode permettant de modéliser les mouvements de caméra par des combinaisons linéaires de champs de déplacement prédéfinis représentant les différents mouvements que peut effectuer la caméra. Ces mouvements sont les suivants : trois mouvements de déplacement selon les trois axes, trois mouvements de rotation selon ces mêmes axes et un mouvement de zoom. Ils génèrent alors un ensemble de champs de déplacement, appelés champs « prototypes », représentant chaque mouvement, ainsi que des combinaisons de ces mouvements, à partir de leur expression analytique (cf. FIGURE 1.17). Chaque mouvement est généré pour différentes amplitudes. Ils extraient ensuite les points d'intérêt des images qui composent la séquence. Ces points d'intérêt correspondent généralement aux coins des objets qui composent la scène étudiée. Ils calculent alors un ensemble de champs de déplacement non denses représentant les différents champs « prototypes » composés d'un vecteur par point d'intérêt. Ces champs sont appelés champs « modèles » (cf. FIGURE 1.18). Les auteurs proposent d'exprimer les champs de déplacement de la séquence initiale, calculés grâce à une méthode de flot optique, par une combinaison linéaire de ces différents champs « modèles ». Les paramètres de cette combinaison linéaire sont calculés par une méthode des moindres-carrés. Au final, le mouvement de la caméra est exprimé sous forme d'une somme des différents champs « modèles » pondérée par les coefficients précédemment calculés. Connaissant l'expression analytique de ces champs modèles, car générés à partir des champs « prototypes », ils peuvent alors calculer l'expression analytique du mouvement de la caméra. Les auteurs évaluent la qualité de leur méthode sur des séquences synthétiques et expérimentales. Ils montrent notamment qu'elle est précise et résistante au bruit.

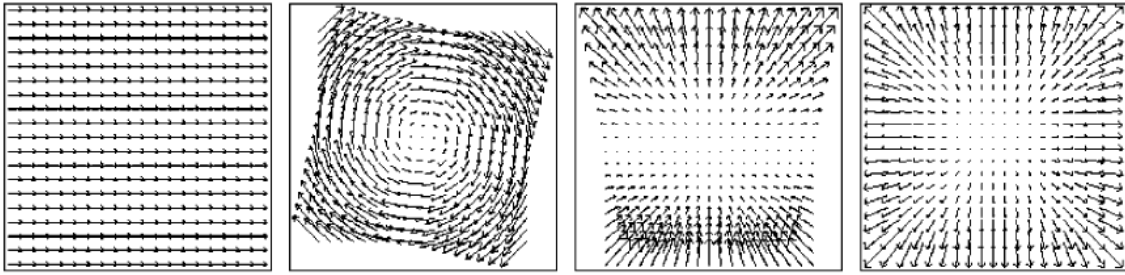


FIGURE 1.17 – Exemple de champs « prototypes ». Ces champs sont générés à partir des équations analytiques des différents mouvements qu'ils représentent. Image extraite de [Park 04].

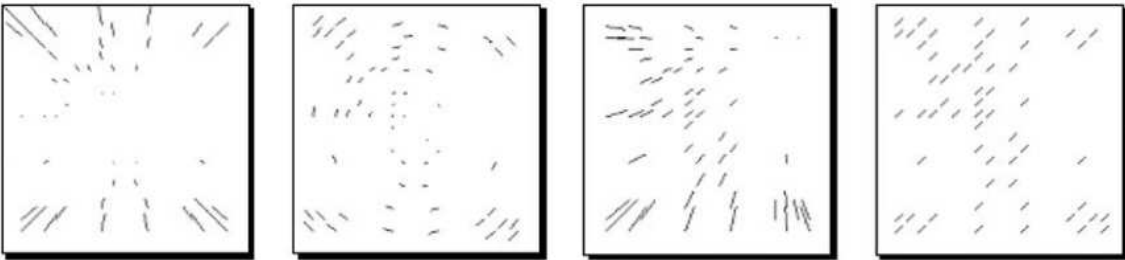


FIGURE 1.18 – Exemple de champs « modèles ». Ces champs sont issus des champs « prototypes » auxquels on a associé un vecteur par point d'intérêt détecté dans l'image. Image extraite de [Park 04].

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les méthodes de modélisation des champs de déplacement représentant le mouvement contenu dans des séquences d'images. Parmi les différents types de modèles proposés dans la littérature, nous avons plus particulièrement analysé les modèles paramétriques basés sur les séries de fonctions. Celles-ci peuvent alors être propres à chaque mouvement étudié, comme c'est le cas pour la décomposition orthogonale aux valeurs propres, ou elles peuvent être fixées sans connaissance du mouvement.

Concernant cette dernière catégorie, nous avons étudié en détail les travaux de BRUNO [Bruno 00, Bruno 01a, Bruno 01b], HOEY et LITTLE [Hoey 00, Hoey 02], FLEET *et al.* [Fleet 00] et PARK *et al.* [Park 04]. Parmi les différentes approches étudiées, seule la méthode proposée par PARK *et al.* permet d'obtenir une représentation polynomiale du mouvement. Par contre, elle ne permet pas de modéliser des mouvements complexes car elle nécessiterait un trop grand nombre de champs « prototypes » et de champs « modèles ». Un autre point important concerne les temps de calcul des paramètres du modèle. Les approches faisant intervenir certaines fonctions mathématiques telles que l'exponentielle, le sinus ou le cosinus semblent alors peu appropriées pour traiter rapidement de gros volumes de données [Bruno 00, Bruno 01a, Hoey 00, Hoey 02, Fleet 00].

Dans le prochain chapitre, nous présentons le principe théorique de notre méthode.

---

## CHAPITRE 2

---

# MODÉLISATION DU MOUVEMENT PAR POLYNÔMES ORTHOGONAUX

---

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode destinée à exprimer des champs de déplacement par des combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux. Tout d'abord, nous rappelons les bases théoriques de l'approximation au sens des moindres carrés de fonctions réelles continues. Ensuite, nous présentons notre méthode permettant de modéliser des champs de déplacement bidimensionnels à deux composantes par des combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux. Nous étudions alors certaines propriétés de notre modèle et nous donnons sa complexité. Finalement, nous généralisons notre méthode à des champs multidimensionnels multi-composantes.

## 2.1 Cadre théorique de l'approximation de fonctions réelles

### 2.1.1 Principe général de l'approximation de fonctions

Nous cherchons à approximer de façon globale, c'est-à-dire sur l'ensemble d'un domaine  $\Omega$ , une fonction continue  $f(x)$ , définie sur ce domaine, par un approximant  $\tilde{f}(x)$  ayant un nombre fixe et fini de paramètres  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ . Pour cela, l'approche générale d'un problème d'approximation peut être décomposée en plusieurs points [Rice 69, Cheney 82, Rivlin 03] :

- choix de l'approximant et de la fonction permettant de mesurer l'écart entre  $f(x)$  et  $\tilde{f}(x)$  ;
- existence de la solution ;
- unicité de la solution ;
- propriétés de la solution ;
- calcul de la solution.

Le premier point, généralement considéré comme le plus délicat, conditionne en grande partie la qualité des résultats obtenus. En théorie, toute fonction peut être utilisée comme approximant. Mais dans la pratique, l'ensemble des approximants couramment utilisés est restreint. Il comprend notamment les séries de Fourier, les polynômes, les polynômes trigonométriques, les

fonctions rationnelles ou les fonctions définies par morceaux telles que les splines. Malheureusement, pour un problème aussi général, il n'existe pas de méthode permettant de déterminer à coup sûr la meilleure classe d'approximants. Le choix dépend alors principalement des fonctions  $f(x)$  à approximer et du type de solution souhaitée. Un autre problème concerne la mesure de la validité de l'approximation. En effet, pour évaluer la qualité du nouveau modèle, il est nécessaire de pouvoir mesurer l'écart, appelé aussi *distance*, entre la fonction à approximer et son approximation. Encore une fois, la façon de calculer cette distance peut influencer sur la qualité du résultat. Cette distance est fréquemment définie à partir de normes appelées  $L_p$ , notées  $||\cdot||_p$  et définies de la façon suivante :

$$||f(x)||_p = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad (2.1)$$

Par la suite, nous souhaitons obtenir une représentation analytique du mouvement. Nous désirons également être capable d'effectuer certaines opérations sur le mouvement étudié telles que des calculs différentiels ou intégraux. De plus, nous souhaitons obtenir un modèle facilement implantable sur ordinateur et permettant de traiter de gros volumes de données. Nous décidons donc d'approximer la fonction  $f(x)$  par une combinaison linéaire de fonctions polynomiales. La forme générale de notre solution est donc la suivante :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \quad (2.2)$$

avec  $\{\phi_i\}$  un ensemble de polynômes. Concernant la fonction distance, nous utilisons la norme  $L_2$ . Pour les approximants linéaires, cette norme est fréquemment utilisée et nous verrons par la suite que la détermination de la meilleure approximation au sens de  $L_2$  par un approximant linéaire est un problème qui peut être résolu rapidement et complètement.

Le second point concerne l'existence d'une solution. En effet, nous souhaitons approximer une fonction continue  $f(x)$  par une combinaison linéaire de polynômes. La question est alors de savoir s'il existe une solution à ce problème d'approximation, quelle que soit la fonction  $f(x)$ . En 1885, KARL WEIERSTRASS résolut ce problème en affirmant que si  $f(x)$  est une fonction continue sur  $\Omega$  et si  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$  alors il existe un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}[x]$  tel que :

$$\forall x \in \Omega, \quad |P_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad (2.3)$$

Concernant l'unicité de la solution, nous pouvons montrer que si  $f(x)$  est une fonction continue sur  $\Omega$  et  $\{\phi_i(x)\}$  un ensemble de fonctions linéairement indépendantes, la fonction  $f(x)$  admet une fonction approchée  $\tilde{f}(x)$  au sens de  $L_2$  unique, de la forme :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(x) \quad (2.4)$$

Le quatrième point concerne les propriétés de la solution. Nous ne revenons pas ici sur les propriétés des polynômes et nous renvoyons aux nombreux travaux existants [Szegö 75]. Par contre, nous détaillons au paragraphe 2.4 les propriétés de notre modèle.

Le dernier point concerne le calcul de la solution. Ce point est détaillé plus loin dans ce chapitre. Nous proposons alors une méthode permettant d'évaluer les paramètres  $a_i$  et nous étudions sa complexité.



calcul et instable numériquement. Par exemple, l'inversion d'une matrice de taille  $n \times n$  par la méthode d'élimination de Gauss-Jordan nécessite  $\frac{2}{3} n^3$  opérations. Si les approximations  $\{\phi_i(x)\}$  sont orthogonales deux à deux, on a alors :

$$\langle \phi_i(x) \mid \phi_j(x) \rangle = \|\phi_i\|_2^2 \delta^{i,j} \quad (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 \quad (2.11)$$

avec  $\delta^{i,j}$  le symbole de Kronecker. Dans ce cas, la matrice  $\Phi$  est diagonale. Elle devient donc facilement inversible. Les coefficients  $a_i$  sont alors calculés ainsi :

$$a_i = \frac{\langle f(x) \mid \phi_i(x) \rangle}{\langle \phi_i(x) \mid \phi_i(x) \rangle} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.12)$$

On comprend alors l'intérêt de travailler avec des systèmes orthogonaux. Dans ce cas, l'erreur d'approximation de  $f(x)$  par  $\tilde{f}(x)$  est égale à :

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\|_2 = \sqrt{\left( \|f(x)\|_2^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \langle \phi_i(x) \mid \phi_i(x) \rangle \right)} \quad (2.13)$$

De plus, si le système est orthonormal, on a :

$$\langle \phi_i(x) \mid \phi_j(x) \rangle = \delta^{i,j} \quad (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 \quad (2.14)$$

avec  $\delta^{i,j}$  le symbole de Kronecker. La matrice  $\Phi$  est alors la matrice identité. L'équation (2.10) devient :

$$A = B \quad (2.15)$$

Les coefficients sont alors directement obtenus de la façon suivante :

$$a_i = \langle f(x) \mid \phi_i(x) \rangle \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.16)$$

L'erreur d'approximation de  $f(x)$  par  $\tilde{f}(x)$  est alors égale à :

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\|_2 = \sqrt{\left( \|f(x)\|_2^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)} \quad (2.17)$$

## 2.2 Modélisation des champs de déplacement par bases de polynômes

Nous venons de voir le principe d'approximation d'une fonction continue monodimensionnelle. Nous allons maintenant décrire le processus permettant de modéliser un champ de déplacement par des combinaisons linéaires de polynômes. Celui-ci se décompose en trois points :

- définition des champs de déplacement et des fonctions polynomiales ;
- génération d'une base orthogonale bidimensionnelle ;
- approximation d'un champ de déplacement.



### 2.2.1 Définition des champs de déplacement et des fonctions polynomiales

Dans un premier temps, nous limitons notre étude à des champs bidimensionnels à deux composantes (2D-2C). Nous généralisons notre méthode à des champs multidimensionnels multicomposantes au paragraphe 2.6. Nous définissons donc un champ de déplacement  $\mathcal{F}$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (\mathcal{V}^1(x_1, x_2), \mathcal{V}^2(x_1, x_2)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

avec  $\mathcal{V}^1 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathcal{V}^2 : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications correspondant respectivement aux déplacements horizontaux et verticaux aux points de coordonnées  $(x_1, x_2) \in \Omega$ . Par la suite, la taille de ce champ  $\mathcal{F}$  est notée  $S_{i_1} \times S_{i_2}$ . Deux exemples de champs de déplacement bidimensionnels à deux composantes (2D-2C) sont donnés FIGURE 2.1.

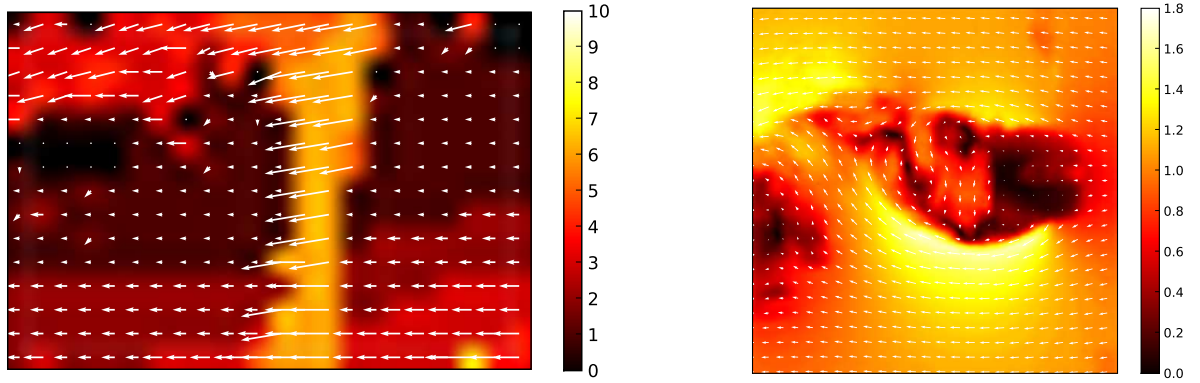


FIGURE 2.1 – Exemples de champs de déplacement bidimensionnels à deux composantes (2D-2C). Pour des raisons de lisibilité, une carte de couleur représentant la norme de chaque vecteur a été ajoutée et seul un vecteur sur cinq est affiché. Les mesures sont exprimées en pixel.

Nous souhaitons approximer des fonctions réelles à deux variables par des fonctions polynomiales. Nous utilisons donc des polynômes définis dans  $\mathbb{R}[x_1, x_2]$  de la façon suivante :

$$P_{K,L} = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L c_{k,l} (x_1)^k (x_2)^l \quad (2.19)$$

où  $K \in \mathbb{N}^+$  est le degré maximal selon  $x_1$ ,  $L \in \mathbb{N}^+$  est le degré maximal selon  $x_2$  et  $\{c_{k,l}\}$  est l'ensemble des coefficients réels du polynôme. Le degré du polynôme est alors  $K + L$ .

### 2.2.2 Génération d'une base orthogonale bidimensionnelle

Nous avons vu l'avantage de travailler avec des bases composées de fonctions orthogonales. Dans notre cas, nous sommes libres de choisir la famille des approximants. Nous décidons donc de générer une famille de fonctions orthogonales à partir de la formule de récurrence à trois termes suivante :

$$\begin{cases} P_{-1,j} = 0 \\ P_{i,-1} = 0 \\ P_{0,0} = 1 \\ P_{i+1,j} = (a_i x_1 + b_i) P_{i,j} - c_i P_{i-1,j} \\ P_{i,j+1} = (a_j x_2 + b_j) P_{i,j} - c_j P_{i,j-1} \end{cases} \quad (2.20)$$

À partir des valeurs de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  présentées TABLEAU 2.1, nous pouvons générer différentes familles de polynômes orthogonaux connus. Ces polynômes sont alors orthogonaux deux à deux sur le domaine  $\Omega$  par rapport au produit scalaire défini en (2.6), relativement à la fonction de poids  $\omega(x_1, x_2)$ . Nous pouvons remarquer que les polynômes  $P_{i,j}$  générés sont de degré  $i + j$ . Finalement, nous normalisons chaque polynôme. Ils vérifient alors la règle d'orthonormalité :

$$\langle P_{i,j} \mid P_{k,l} \rangle = \delta^{(i,j),(k,l)} \quad (2.21)$$

avec  $\delta^{(i,j),(k,l)}$  le symbole de Kronecker défini de la façon suivante :

$$\delta^{(i,j),(k,l)} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) = (k, l) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.22)$$

TABLEAU 2.1 – Paramètres utilisés dans la formule de récurrence (2.20) pour la génération de quelques familles de polynômes orthogonaux connus.

Famille	$\Omega$	$\omega(x_1, x_2)$	$a_n$	$b_n$	$c_n$
Legendre	$[-1 ; 1]^2$	1	$\frac{2n+1}{n+1}$	0	$\frac{n}{n+1}$
Tchebychev (1 <sup>re</sup> sorte)	$[-1 ; 1]^2$	$\prod_{i=1}^2 (1 - x_i^2)^{(-1/2)}$	2	0	1
Tchebychev (2 <sup>e</sup> sorte)	$[-1 ; 1]^2$	$\prod_{i=1}^2 (1 - x_i^2)^{(1/2)}$	2	0	1
Laguerre	$[0 ; \infty]^2$	$\exp^{-(x_1+x_2)}$	$\frac{-1}{n+1}$	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
Hermite	$[-\infty ; \infty]^2$	$\exp^{-(\frac{x_1^2+x_2^2}{2})}$	2	0	$2n$

Notre base bidimensionnelle  $\mathcal{B} = \{P_{i,j}\}$  est donc composée de polynômes orthonormaux. Nous appelons *degré D* de cette base le degré le plus élevé des polynômes qui la composent et nous trions ces polynômes par ordre lexicographique croissant. Une base bidimensionnelle de degré  $D$  est alors constituée de l'ensemble des polynômes  $\{P_{i,j}\}$  avec  $i + j \leq D$  :

$$\mathcal{B}_D = \{P_{0,0}, P_{0,1}, \dots, P_{0,D}, P_{1,0}, \dots, P_{1,D-1}, \dots, P_{D-1,0}, P_{D-1,1}, P_{D,0}\} \quad (2.23)$$

Une représentation tabulaire d'une telle base est donnée FIGURE 2.2. Le nombre de polynômes qui composent une base de degré  $D$  est alors :

$$n_D = \frac{(D+1)(D+2)}{2}$$

$$\mathcal{B}_D =$$

	$(x_2)^0$	$(x_2)^1$	$\dots$	$(x_2)^{D-1}$	$(x_2)^D$
$(x_1)^0$	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$	$\dots$	$P_{0,D-1}$	$P_{0,D}$
$(x_1)^1$	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$	$\dots$	$P_{1,D-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
$(x_1)^{D-1}$	$P_{D-1,0}$	$P_{D-1,1}$			
$(x_1)^D$	$P_{D,0}$				

FIGURE 2.2 – Représentation tabulaire d’une base bidimensionnelle de degré  $D$ . Le premier polynôme  $P_{0,0}$  se situe dans le coin supérieur gauche. Une évolution selon les lignes d’une même colonne ne fait varier que le degré selon  $x_1$  des polynômes. Une évolution selon les colonnes d’une même ligne ne fait varier que le degré selon  $x_2$  des polynômes.

### 2.2.3 Approximation d’un champ de déplacement

Nous cherchons à exprimer le champ de déplacement  $\mathcal{F}$  par des combinaisons linéaires des différents polynômes  $P_{i,j}$  de la base orthonormale  $\mathcal{B}_D$  générée précédemment. Pour cela, nous projetons les fonctions  $\mathcal{V}^1(x_1, x_2)$  et  $\mathcal{V}^2(x_1, x_2)$  sur chaque polynôme  $P_{i,j}$  de la base. D’après (2.16), nous pouvons exprimer  $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{V}}^1(x_1, x_2), \tilde{\mathcal{V}}^2(x_1, x_2))$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}^1(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^{D-i} \tilde{v}_{i,j}^1 P_{i,j} & \text{avec} \quad \tilde{v}_{i,j}^1 = \langle \mathcal{V}^1(x_1, x_2) \mid P_{i,j} \rangle \\ \tilde{\mathcal{V}}^2(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^D \sum_{j=0}^{D-i} \tilde{v}_{i,j}^2 P_{i,j} & \text{avec} \quad \tilde{v}_{i,j}^2 = \langle \mathcal{V}^2(x_1, x_2) \mid P_{i,j} \rangle \end{cases} \quad (2.24)$$

À partir de la définition du produit scalaire donnée en (2.6), nous pouvons calculer les coefficients  $\tilde{v}_{i,j}^1$  et  $\tilde{v}_{i,j}^2$ , appelés par la suite *coefficients de projection*, de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{v}_{i,j}^1 = \iint_{\Omega} \mathcal{V}^1(x_1, x_2) P_{i,j} \omega(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ \tilde{v}_{i,j}^2 = \iint_{\Omega} \mathcal{V}^2(x_1, x_2) P_{i,j} \omega(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{cases} \quad (2.25)$$

avec  $i + j \leq D$ . Connaissant les coefficients de projection  $\tilde{v}_{i,j}^1$  et  $\tilde{v}_{i,j}^2$ , nous pouvons alors déterminer l’expression analytique de notre modèle grâce à l’équation (2.24). Finalement, à partir de cette expression analytique, nous pouvons reconstruire une approximation du champ original en évaluant les polynômes  $\tilde{\mathcal{V}}^1$  et  $\tilde{\mathcal{V}}^2$  obtenus, en tout point souhaité. Le processus complet de modélisation et de reconstruction est donné FIGURE 2.3. Un exemple de combinaisons linéaires de polynômes permettant de modéliser un champ synthétique est présenté FIGURE 2.4. La FIGURE 2.5 montre l’influence du degré  $D$  de la base sur la modélisation d’un mouvement complexe.

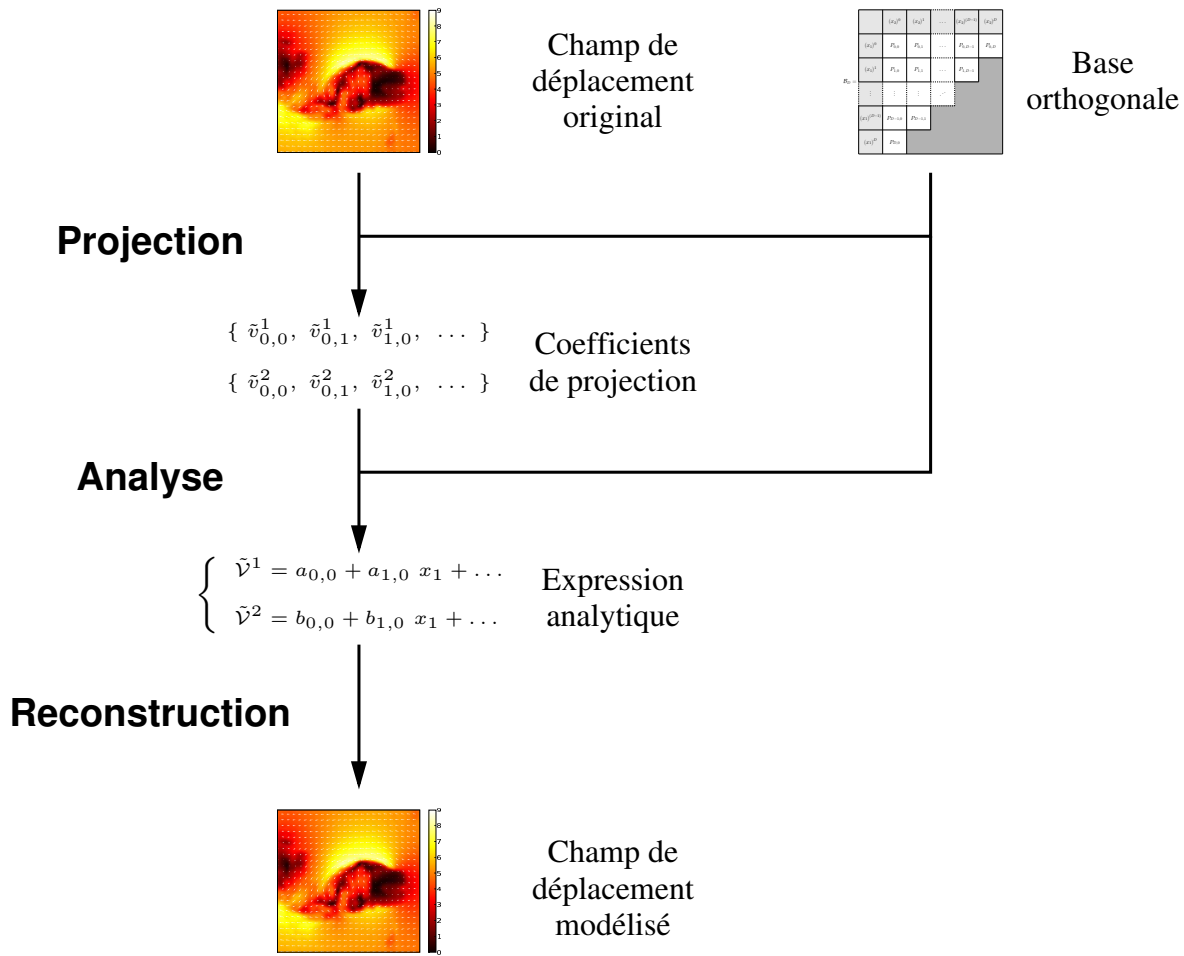


FIGURE 2.3 – Processus utilisé pour la modélisation et la reconstruction d'un champ de déplacement. Ce processus est composé de trois parties : une phase de projection d'un champ sur une base permettant de calculer les coefficients de projection ; une phase d'analyse permettant de déterminer l'expression analytique du mouvement à partir des coefficients de projection et de la base ainsi qu'une phase de reconstruction permettant de calculer le champ de déplacement modélisé à partir de l'expression analytique.

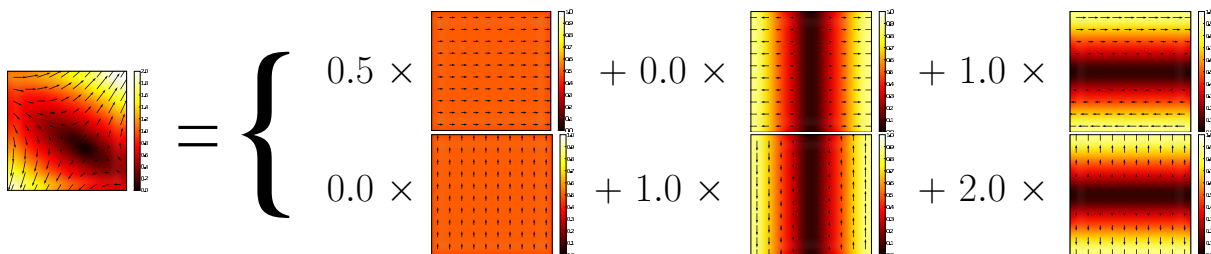


FIGURE 2.4 – Exemple de combinaisons linéaires de polynômes permettant de modéliser un champ synthétique.

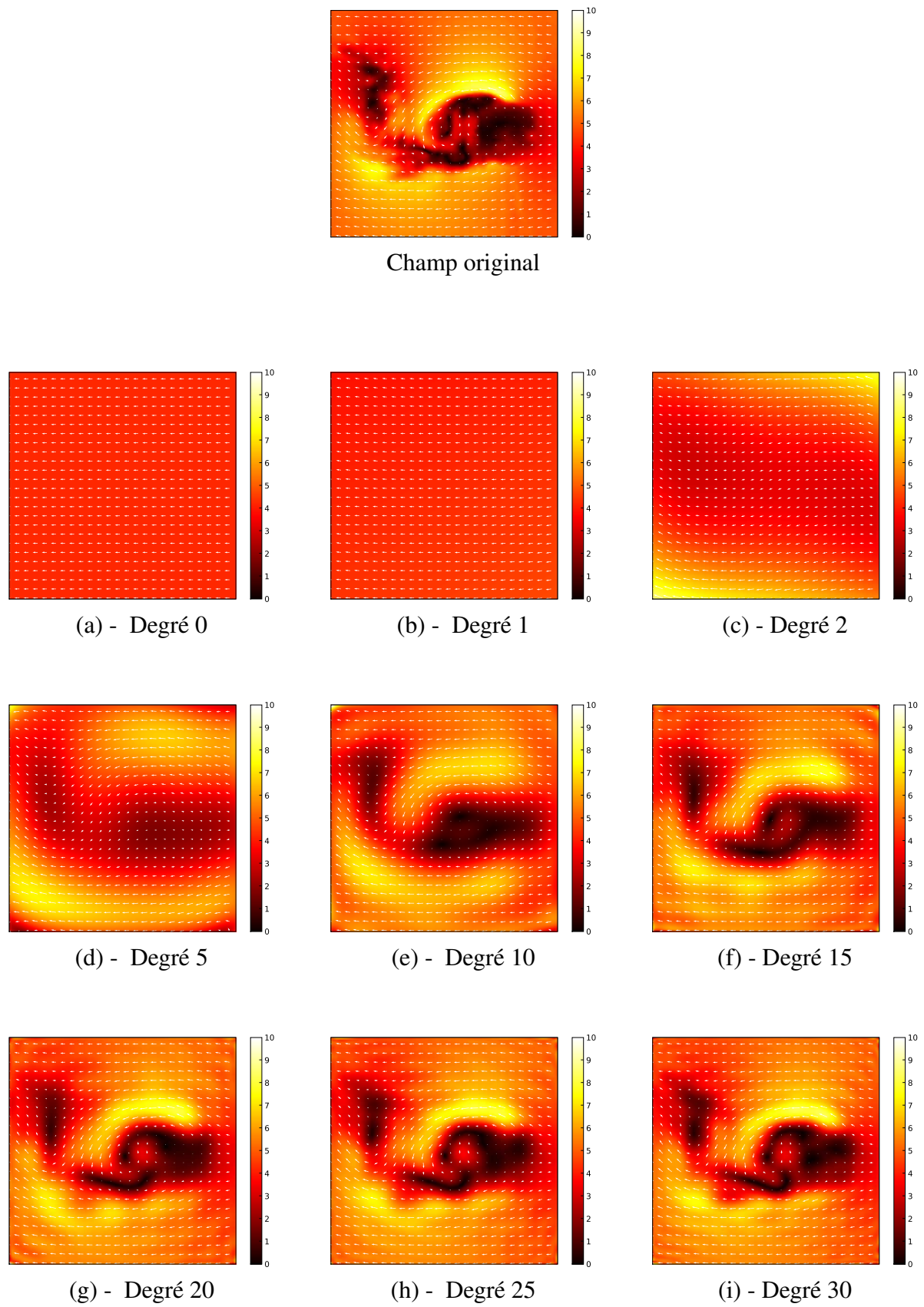


FIGURE 2.5 – Influence du degré de la base sur la modélisation d'un mouvement complexe.

## 2.3 Discrétisation du problème

L'équation (2.25) permet de calculer les coefficients de projection de notre modèle. Malheureusement, les champs de déplacement  $\mathcal{F}$  sont généralement issus de données expérimentales. Les fonctions  $\mathcal{V}^1$  et  $\mathcal{V}^2$  ne sont alors qu'un ensemble discret de points dont on ne connaît pas l'expression analytique. Nous ne pouvons donc pas évaluer les intégrales de cette équation de façon analytique.

Pour résoudre ce problème, nous utilisons ici une méthode basée sur la relation de Chasles appliquée au calcul intégral. Nous découpons alors le domaine  $\Omega$  en  $S_{i_1} \times S_{i_2}$  sous-domaines, chaque sous-domaine étant centré sur un vecteur du champ de déplacement. Les données étant disposées selon une grille régulière, la distance entre deux vecteurs voisins est la même pour tout le champ. Elle est notée  $\Delta_{x_1}$  pour la première dimension et  $\Delta_{x_2}$  pour la seconde dimension. Cette distance définit alors la taille de chaque sous-domaine.

Soient  $(s_{i_1}, s_{i_2}) \in [0; S_{i_1} - 1] \times [0; S_{i_2} - 1]$  les coordonnées d'un vecteur du champ. Soient  $(i_{x_1}, i_{x_2}) \in [a_{x_1}; b_{x_1}] \times [a_{x_2}; b_{x_2}]$  les coordonnées de  $(s_{i_1}, s_{i_2})$  exprimées dans l'intervalle de définition des polynômes qui constituent la base, présenté TABLEAU 2.1. On a alors :

$$\begin{cases} i_{x_1} = a_{x_1} + \frac{b_{x_1} - a_{x_1}}{S_{i_1} - 1} s_{i_1} \\ i_{x_2} = a_{x_2} + \frac{b_{x_2} - a_{x_2}}{S_{i_2} - 1} s_{i_2} \end{cases} \quad (2.26)$$

L'évaluation de l'équation (2.25) revient alors à calculer la somme des intégrales de chaque sous-domaine :

$$\begin{cases} \tilde{v}_{i,j}^1 = \sum_{s_{i_1}=0}^{S_{i_1}-1} \sum_{s_{i_2}=0}^{S_{i_2}-1} \int_{i_{x_1}}^{i_{x_1}+\Delta_{x_1}} \int_{i_{x_2}}^{i_{x_2}+\Delta_{x_2}} \mathcal{V}^1(s_{i_1}, s_{i_2}) P_{i,j}(i_{x_1}, i_{x_2}) \omega(i_{x_1}, i_{x_2}) dx_1 dx_2 \\ \tilde{v}_{i,j}^2 = \sum_{s_{i_1}=0}^{S_{i_1}-1} \sum_{s_{i_2}=0}^{S_{i_2}-1} \int_{i_{x_1}}^{i_{x_1}+\Delta_{x_1}} \int_{i_{x_2}}^{i_{x_2}+\Delta_{x_2}} \mathcal{V}^2(s_{i_1}, s_{i_2}) P_{i,j}(i_{x_1}, i_{x_2}) \omega(i_{x_1}, i_{x_2}) dx_1 dx_2 \end{cases} \quad (2.27)$$

Comme nous l'avons précisé précédemment, les fonctions  $\mathcal{V}^1$  et  $\mathcal{V}^2$  ne sont généralement pas connues analytiquement. Pour résoudre l'équation (2.27), nous définissons localement, c'est-à-dire au sein de chaque sous-domaine, ces fonctions  $\mathcal{V}^1$  et  $\mathcal{V}^2$  par des fonctions constantes dont les valeurs sont les composantes du vecteur associé à ce sous-domaine. Dans ce cas, nous pouvons réécrire l'équation (2.27) de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{v}_{i,j}^1 = \sum_{s_{i_1}=0}^{S_{i_1}-1} \sum_{s_{i_2}=0}^{S_{i_2}-1} \mathcal{V}^1(s_{i_1}, s_{i_2}) \int_{i_{x_1}}^{i_{x_1}+\Delta_{x_1}} \int_{i_{x_2}}^{i_{x_2}+\Delta_{x_2}} P_{i,j}(i_{x_1}, i_{x_2}) \omega(i_{x_1}, i_{x_2}) dx_1 dx_2 \\ \tilde{v}_{i,j}^2 = \sum_{s_{i_1}=0}^{S_{i_1}-1} \sum_{s_{i_2}=0}^{S_{i_2}-1} \mathcal{V}^2(s_{i_1}, s_{i_2}) \int_{i_{x_1}}^{i_{x_1}+\Delta_{x_1}} \int_{i_{x_2}}^{i_{x_2}+\Delta_{x_2}} P_{i,j}(i_{x_1}, i_{x_2}) \omega(i_{x_1}, i_{x_2}) dx_1 dx_2 \end{cases} \quad (2.28)$$

Le problème revient alors à calculer les intégrales doubles.

### 2.3.1 Méthode directe

La première approche consiste à calculer analytiquement ces intégrales doubles. Lorsque la fonction de poids n'est pas un polynôme, ces intégrales peuvent être évaluées de plusieurs façons comme, par exemple, en approximant cette fonction de poids par un polynôme ou en utilisant une méthode de Monté-Carlo.

### 2.3.2 Méthode simplifiée

Une approche simplifiée de ce problème revient à approximer les fonctions  $P_{i,j}(x_1, x_2)$  et  $\omega(x_1, x_2)$  par des fonctions constantes sur chaque sous-domaine. Le calcul des intégrales doubles est alors ramené à l'évaluation de ces deux fonctions en un point correspondant au centre du sous-domaine. Cette approche est donc de complexité réduite. Par contre, si la taille des champs de déplacement est faible ou que les fonctions  $P_{i,j}(x_1, x_2)$  et  $\omega(x_1, x_2)$  sont de complexités élevées, cette méthode peut entraîner une perte de précision. Par la suite, nous sommes amenés à traiter des champs de déplacement représentant des mouvements complexes. Nous n'utilisons donc pas cette approche.

### 2.3.3 Méthode optimisée pour le traitement séquentiel d'une série de champs de déplacement

Pour des polynômes ou des fonctions de poids de complexités élevées, l'évaluation des intégrales doubles pour chaque sous-domaine peut être coûteuse en temps de calcul. Dans le but de traiter de gros volumes de données, c'est-à-dire des séries composées de plusieurs centaines ou milliers de champs, nous proposons ici une méthode permettant de calculer plus rapidement les coefficients de projection  $\tilde{v}_{i,j}^1$  et  $\tilde{v}_{i,j}^2$  en limitant le nombre d'évaluation de ces intégrales. En étudiant l'équation (2.28), nous constatons que ces intégrales doubles ne dépendent pas du champ de déplacement traité mais uniquement des polynômes qui constituent la base et de la fonction de poids. Lorsque plusieurs champs d'une même séquence doivent être projetés sur la base, les temps de calculs peuvent alors être considérablement diminués en précalculant ces intégrales. Pour cela, il suffit de connaître les polynômes qui constituent la base, la fonction de poids associée ainsi que la taille des champs de déplacement (afin de déterminer les différents sous-domaines). Ces intégrales précalculées, la projection de chaque champ de la séquence sur la base se ramène alors à des sommes de produits entre les fonctions constantes  $\mathcal{V}^1$  et  $\mathcal{V}^2$  et les scalaires issus de ce précalcul.

## 2.4 Propriétés de la méthode

Tout d'abord, notre modèle fournit une expression analytique du mouvement. Nous pouvons donc extraire simplement et rapidement certaines caractéristiques. Par exemple, les calculs différentiels, tels que la divergence ou le rotationnel, et les calculs intégraux sur le champ de déplacement sont ramenés à des calculs polynomiaux.

Ensuite, ce modèle est défini sur l'ensemble du domaine continu  $\Omega$ . Nous pouvons donc calculer les composantes d'un vecteur en tout point du domaine de définition. Notre approche peut donc être à la base d'une méthode d'interpolation des données.

Comme nous l'avons précisé précédemment, nous avons une base commune à tous les écoulements étudiés. De ce fait, nous pouvons appliquer des algorithmes de comparaison, de classification ou d'indexation directement sur les coefficients de projection  $\tilde{v}_{i,j}^1$  et  $\tilde{v}_{i,j}^2$ , sans passer par une étape supplémentaire destinée à exprimer ces coefficients dans le même référentiel.

Un autre aspect de notre modèle concerne l'interprétation du mouvement. Nous verrons, lors des prochains chapitres, que l'utilisation d'une base composée des polynômes de Legendre permet d'interpréter physiquement certains coefficients de projection.

En étudiant l'équation (2.25), nous constatons que la projection d'un champ sur la base ne fait pas intervenir les autres champs de la séquence. Cette propriété permet alors de traiter une séquence de champs « à la volée » : nous pouvons projeter un champ de déplacement sans que l'intégralité de la séquence ne soit connue. Cela peut être intéressant, par exemple, dans des applications nécessitant un traitement en temps-réel telles que des applications interactives ou destinées à faire du contrôle. De plus, si un champ est ajouté au sein de la séquence, il n'est pas nécessaire de recalculer les coefficients de projection des champs déjà traités.

Comme nous venons de le préciser, la projection d'un champ de déplacement ne fait pas intervenir les autres champs de la séquence. Le temps de calcul des coefficients de projection ne dépend donc que du degré de la base utilisée et de la taille du champ. De ce fait, le temps nécessaire à la projection de deux champs de même taille sur une même base est constant, quel que soit le nombre de champs de la séquence. De plus, ce processus indépendant permet de paralléliser simplement le calcul des coefficients de projection de chaque champ.

Nous pouvons également remarquer que notre méthode compresse l'information. En effet, nous modélisons un champ de déplacement, c'est-à-dire  $2 \times S_{i_1} \times S_{i_2}$  valeurs, avec  $(D+1)(D+2)$  coefficients. Le taux de compression est alors :

$$\tau_{[\%]} = \left( 1 - \frac{(D+1)(D+2)}{2 \times S_{i_1} \times S_{i_2}} \right) \times 100 \quad (2.29)$$

Un autre point important de notre méthode concerne son implantation aisée sur ordinateur. En effet, les polynômes sont des outils mathématiques couramment utilisés en informatique.

Finalement, la résistance au bruit de notre méthode est étudiée dans le prochain chapitre.

## **2.5 Complexité et occupation mémoire**

### **2.5.1 Implantation informatique des polynômes**

Notre méthode a pour but de modéliser le mouvement contenu dans des champs de déplacement par des combinaisons linéaires de polynômes. De ce fait, sa complexité et son occupation mémoire sont fortement liées à la structure de données utilisée pour représenter ces polynômes sur ordinateur. Actuellement, plusieurs structures sont disponibles (listes, matrices...), chacune ayant ses avantages et ses inconvénients. Par exemple, certaines structures privilégient la rapidité d'évaluation d'un polynôme en un point donné, d'autres sont destinées à fournir une occupation mémoire réduite. Ne pouvant étudier la complexité de notre méthode pour toutes les structures de données disponibles, nous donnons ici une complexité "haut-niveau". Nous appelons donc, par la suite :

- $P_+^2$ ,  $P_-^2$ ,  $P_*^2$  et  $P_{/}^2$  le coût d'une opération, respectivement une addition, une soustraction, une multiplication ou une division, d'un polynôme bivariable avec un scalaire ;



- $P_a^2$ ,  $P_s^2$ ,  $P_m^2$  et  $P_d^2$  le coût d'une opération, respectivement une addition, une soustraction, une multiplication ou une division, entre deux polynômes bivariés ;
- $P_E^2$  le coût de l'évaluation du polynôme bivariable en un point ;
- $P_I^2$  le coût de l'évaluation d'une intégrale double ;

Ces opérations sont données ici par ordre croissant de complexité.

L'occupation mémoire d'un polynôme de degré  $d$  est également liée à la structure de données utilisée. Nous notons donc  $M^d$  le nombre de réels<sup>1</sup> nécessaires pour représenter un polynôme de degré  $d$ .

### 2.5.2 Génération de la base

À partir de la formule de récurrence (2.20) utilisée pour générer la base, nous en déduisons que les opérations nécessaires à la génération d'un polynôme sont les suivantes :

$$P_+^2 + 2 P_*^2 + P_s^2 + P_m^2 \quad (2.30)$$

La complexité de la génération d'une base de degré  $D$  est donc la suivante :

$$\Theta(n_D \times (P_+^2 + 2 P_*^2 + P_s^2 + P_m^2)) \quad (2.31)$$

avec  $n_D$  le nombre de polynômes qui constituent la base. L'occupation mémoire d'une telle base est :

$$\sum_{d=0}^D (d+1) M^d \text{ réels} \quad (2.32)$$

Nous rappelons ici que ce processus n'est à effectuer qu'une seule fois, quel que soit le nombre de séquences traitées.

Nous pouvons noter qu'il est possible de s'affranchir de ces différentes opérations en récupérant les valeurs précalculées des différents coefficients des polynômes de la base, à partir des tables A008316 et A060818 de *l'encyclopédie en ligne des séquences d'entiers* [Sloane 08].

### 2.5.3 Projection d'un ensemble de champs sur la base

Nous avons étudié au paragraphe 2.3 le processus permettant de projeter un champ de déplacement sur une base de polynômes. Ce processus ainsi que la complexité de chaque étape sont détaillés ALGORITHME 1. Pour simplifier la compréhension, nous supposons que la fonction de poids peut-être approchée par une fonction polynomiale.

La complexité de la projection d'une séquence sur une base par la méthode directe est alors :

$$\Theta(n_C \times n_D \times (P_m^2 + S_{i_1} \times S_{i_2} \times 2 \times (P_m^2 + P_I^2))) \quad (2.33)$$

La projection d'un champ sur une base de degré  $D$  ne nécessite qu'une quantité de mémoire limitée. En effet, seuls la base et le champ de déplacement à traiter doivent être chargés en mémoire. L'occupation mémoire de cette méthode est donc :

$$\left( \sum_{d=0}^D (d+1) M^d \right) + 2 \times S_{i_1} \times S_{i_2} \text{ réels} \quad (2.34)$$

<sup>1</sup>Nous exprimons ici la quantité de mémoire utilisée en *réel*, le nombre d'octets nécessaires pour représenter ce réel étant dépendant de la précision souhaitée ou du langage de programmation utilisé.

---

**ALGORITHME 1** Projection d'une séquence sur une base de polynômes - méthode directe

---

```

pour chaque champ de la séquence (à répéter  $n_C$  fois) faire
  pour chaque polynôme de la base (à répéter  $n_D$  fois) faire
     $r$  = multiplier le polynôme courant avec la fonction de poids :  $\Theta(P_m^2)$ 
    pour chaque vecteur du champ (à répéter  $S_{i_1} \times S_{i_2}$  fois) faire
      pour chaque composante du vecteur (à répéter 2 fois) faire
        multiplier le polynôme constant par le polynôme  $r$  :  $\Theta(P_m^2)$ 
        évaluer l'intégrale du polynôme obtenu précédemment :  $\Theta(P_I^2)$ 
      fin pour
    fin pour
  fin pour

```

---

En étudiant la complexité de la méthode directe, nous constatons que le problème principal de cette méthode provient essentiellement du nombre important d'intégrales à calculer. Pour résoudre ce problème, nous avons présenté une autre méthode dont le principe est de précalculer ces intégrales. Cette version optimisée est présentée ALGORITHME 2.

---

**ALGORITHME 2** Projection d'une séquence sur une base de polynômes - méthode optimisée

---

```

pour chaque polynôme de la base (à répéter  $n_D$  fois) faire
   $r$  = multiplier le polynôme courant avec la fonction de poids :  $\Theta(P_m^2)$ 
  pour chaque vecteur du champ (à répéter  $S_{i_1} \times S_{i_2}$  fois) faire
    évaluer l'intégrale du polynôme obtenu précédemment :  $\Theta(P_I^2)$ 
  fin pour
fin pour
pour chaque champ de la séquence (à répéter  $n_C$  fois) faire
  pour chaque polynôme de la base (à répéter  $n_D$  fois) faire
    pour chaque vecteur du champ (à répéter  $S_{i_1} \times S_{i_2}$  fois) faire
      pour chaque composante du vecteur (à répéter 2 fois) faire
        multiplier le polynôme constant par la valeur précalculée  $r$  :  $\Theta(P_m^2)$ 
      fin pour
    fin pour
  fin pour

```

---

La complexité de la projection d'une séquence sur une base de degré  $D$  par la méthode optimisée est alors :

$$\Theta(n_D \times (P_m^2 + S_{i_1} \times S_{i_2} \times P_I^2) + (n_C \times n_D \times S_{i_1} \times S_{i_2} \times 2 \times P_m^2)) \quad (2.35)$$

Pour cette méthode optimisée, il est nécessaire de charger en mémoire une base de degré  $D$  et le champ de déplacement à traiter, ainsi que les intégrales précalculées. L'occupation mémoire de cette méthode optimisée est donc :

$$\left( \sum_{d=0}^D (d+1) M^d \right) + 2 \times S_{i_1} \times S_{i_2} + n_D \times S_{i_1} \times S_{i_2} \text{ réels} \quad (2.36)$$

Nous proposons maintenant de comparer le nombre d'opérations de ces deux méthodes sur un exemple concret. Les données présentées ici sont du même ordre de grandeur que celles

traitées dans la suite de ce mémoire. Nous proposons donc de projeter une séquence composée de 1 000 champs de déplacement de taille  $100 \times 100$  sur une base de degré 20. Nous avons alors les valeurs suivantes :

- Nombre de champs dans la séquence :  $n_C = 1\,000$
- Nombre de polynômes dans la base :  $n_D = 231$
- Taille du champ selon  $x_1$  :  $S_{i_1} = 100$
- Taille du champ selon  $x_2$  :  $S_{i_2} = 100$

D'après (2.33) et (2.35), la méthode directe nécessite  $4.62 \times 10^9 P_m^2$  et  $4.62 \times 10^9 P_I^2$  alors que la méthode optimisée ne nécessite que  $4.62 \times 10^9 P_m^2$  et  $2.31 \times 10^6 P_I^2$ . Pour cet exemple, la version optimisée entraîne 2 000 fois moins de calculs d'intégrales. Cette opération étant coûteuse en temps de calcul, nous comprenons l'intérêt de cette méthode optimisée. Dans les prochains chapitres, nous étudions en détail le temps nécessaire à la projection de diverses séquences sur des bases de degrés variables.

Concernant l'occupation mémoire, la méthode directe nécessite  $\sum_{d=0}^D (d+1) M^d + 20\,000$  réels alors que la méthode optimisée requiert  $\sum_{d=0}^D (d+1) M^d + 20\,000 + 2\,310\,000$  réels, c'est-à-dire environ 2,3 millions de réels supplémentaires. Étant donnée la quantité de mémoire disponible sur les micro-ordinateurs, cette occupation supplémentaire est négligeable au vue des performances obtenues.

### 2.5.4 Reconstruction d'un champ

La reconstruction d'un champ de déplacement à partir des coefficients de projection se fait simplement en évaluant les polynômes  $\tilde{\mathcal{V}}^1$  et  $\tilde{\mathcal{V}}^2$  en tout point du champ. Ce processus est à répéter  $n_C$  fois pour reconstruire l'ensemble de la séquence. Il est représenté ALGORITHME 3.

---

#### ALGORITHME 3 Reconstruction d'un ensemble de champs de déplacement

---

```

pour chaque champ de la séquence (à répéter  $n_C$  fois) faire
  pour chaque polynôme de la base (à répéter  $n_D$  fois) faire
    pour chaque composante du vecteur (à répéter 2 fois) faire
      multiplier le polynôme courant par le coefficient de projection associé :  $\Theta(P_*^2)$ 
      ajouter le polynôme obtenu au polynôme d'approximation déjà calculé :  $\Theta(P_a^2)$ 
    fin pour
  fin pour
  pour chaque vecteur du champ (à répéter  $S_{i_1} \times S_{i_2}$  fois) faire
    pour chaque composante du vecteur (à répéter 2 fois) faire
      évaluer le polynôme d'approximation au point considéré :  $\Theta(P_E^2)$ 
    fin pour
  fin pour
fin pour

```

---

La complexité est alors :

$$\Theta(n_C \times n_D \times 2 \times (P_*^2 + P_a^2) + S_{i_1} \times S_{i_2} \times 2 \times P_E^2) \quad (2.37)$$

La reconstruction d'un champ nécessite simplement de charger en mémoire la base de degré  $D$ . L'occupation mémoire est alors :

$$\sum_{d=0}^D (d+1) M^d \text{ réels} \quad (2.38)$$

## 2.6 Généralisation multidimensionnelle multicomposante

Nous venons de détailler notre méthode pour le traitement de champs de déplacement bi-dimensionnels à deux composantes. Nous allons maintenant généraliser notre méthode dans le but de traiter des champs multidimensionnels multicomposantes.

### 2.6.1 Définition des champs de déplacements et des fonctions polynomiales

Par la suite, nous utilisons les notations vectorielles suivantes :

- les deux variables réelles  $x_1$  et  $x_2$  sont remplacées par  $N$  variables réelles notées  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  ;
- les deux indices entiers  $i$  et  $j$  désignant les polynômes sont remplacés par  $N$  indices entiers notés  $\vec{I} = (i_1, i_2, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^{+N}$ .

De façon similaire à la définition d'un champ 2D-2C proposée en (2.18), nous pouvons définir un champ à  $N$  dimensions et  $C$  composantes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}^C \\ \vec{x} &\mapsto (\mathcal{V}^1(\vec{x}), \mathcal{V}^2(\vec{x}), \dots, \mathcal{V}^C(\vec{x})) \end{aligned} \quad (2.39)$$

La taille de ce champ est notée  $S_{\vec{I}} = S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_N}$  avec  $S_{i_n}$  la taille selon la dimension  $n \in [1; N]$ . Le nombre de réels qui compose ce champ est alors  $S_{\vec{I}} \times C$ .

Par la suite, nous cherchons à exprimer ces champs de déplacement par des combinaisons linéaires de polynômes multivariables définis dans  $\mathbb{R}[\vec{x}]$  de la façon suivante :

$$P_{\vec{I}} = \sum_{a_1=0}^{i_1} \sum_{a_2=0}^{i_2} \dots \sum_{a_N=0}^{i_N} c_{a_1, a_2, \dots, a_N} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_N^{a_N} \quad (2.40)$$

avec  $(i_1, i_2, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^{+N}$  les degrés maximaux selon chaque variable et  $\{c_{a_1, a_2, \dots, a_N}\}$  l'ensemble des coefficients réels du polynôme. Le degré du polynôme est alors égal à la somme des degrés maximaux selon chaque variable.

### 2.6.2 Génération d'une base orthogonale multidimensionnelle

La formule de récurrence (2.20) permettant de générer une base composée de polynômes orthogonaux peut se généraliser en dimension  $N$ . Elle devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{-1, \dots, i_N} = 0 \\ P_{i_1, \dots, -1, \dots, i_N} = 0 \\ P_{i_1, \dots, -1} = 0 \\ P_{0, \dots, 0, \dots, 0} = 1 \\ P_{i_1, \dots, i_N} = (a_{i_1} x_1 + b_{i_1}) P_{i_1, \dots, i_N} - c_{i_1} P_{i_1, \dots, i_N} \\ P_{i_1, \dots, i_n+1, \dots, i_N} = (a_{i_n} x_n + b_{i_n}) P_{i_1, \dots, i_n, \dots, i_N} - c_{i_n} P_{i_1, \dots, i_n-1, \dots, i_N} \\ P_{i_1, \dots, i_N+1} = (a_{i_N} x_N + b_{i_N}) P_{i_1, \dots, i_N} - c_{i_N} P_{i_1, \dots, i_N-1} \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Le nombre de polynômes d'une base de dimension  $N$  est alors obtenu par :

$$n_D = \frac{\prod_{n=1}^N (D + n)}{N!} \quad (2.42)$$

avec  $D$  le degré de la base. Un exemple de représentation de bases de degré 3 est donné FIGURE 2.6, pour les dimensions 1, 2 et 3.

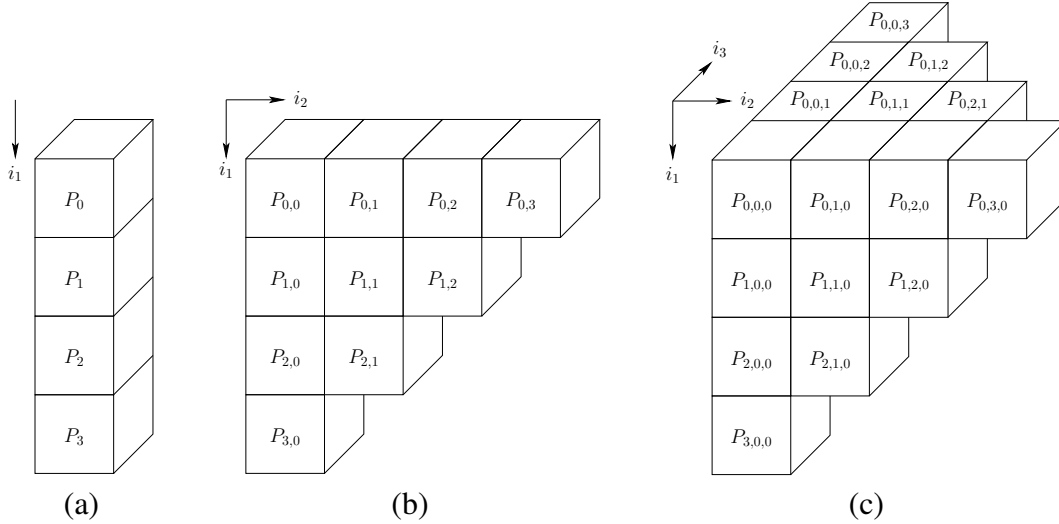


FIGURE 2.6 – Représentation schématique d'une base de degré 3 : (a) - en dimension 1, (b) - en dimension 2 et (c) - en dimension 3 (les polynômes  $P_{1,0,1}$ ,  $P_{1,0,2}$ ,  $P_{1,1,1}$  et  $P_{2,0,1}$  ne sont pas visibles).

### 2.6.3 Approximation d'un champ multidimensionnel multicomposante

La projection d'un champ de déplacement à  $N$  dimensions et  $C$  composantes est fondée sur le même principe que la projection d'un champ bidimensionnel à deux composantes : au lieu d'approximer deux fonctions  $\mathcal{V}^1$  et  $\mathcal{V}^2$  à deux variables réelles  $x_1$  et  $x_2$ , nous cherchons simplement à approximer  $C$  fonctions  $\mathcal{V}^1, \dots, \mathcal{V}^C$  à  $N$  variables réelles  $\vec{x}$  par des combinaisons linéaires de polynômes  $P_{\vec{I}}$  définis dans  $\mathbb{R}[\vec{x}]$ . L'équation (2.25) permettant de calculer les coefficients de projection devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{v}_I^1 = \int_{\Omega} \mathcal{V}^1(\vec{x}) P_{\vec{I}} \omega(\vec{x}) d\vec{x} \\ \tilde{v}_I^2 = \int_{\Omega} \mathcal{V}^2(\vec{x}) P_{\vec{I}} \omega(\vec{x}) d\vec{x} \\ \vdots \\ \tilde{v}_I^C = \int_{\Omega} \mathcal{V}^C(\vec{x}) P_{\vec{I}} \omega(\vec{x}) d\vec{x} \end{array} \right. \quad (2.43)$$

### 2.6.4 Reconstruction d'un champ

De façon similaire, la reconstruction d'un champ à  $N$  dimensions et à  $C$  composantes se fait simplement en évaluant, en chaque point du champ, les  $C$  fonctions  $\tilde{V}^1, \tilde{V}^2, \dots, \tilde{V}^C$  à  $N$  variables.

### 2.6.5 Propriétés du modèle multidimensionnel multicomposante

Les propriétés évoquées précédemment pour la modélisation bidimensionnelle restent valables dans le cas d'une modélisation multidimensionnelle. Concernant la compression des données, un champ de déplacement de taille  $S_{\vec{r}}$  à  $C$  composantes, c'est-à-dire  $S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_N} \times C$  réels, peut être représenté par  $n_D \times C$  coefficients de projection. Le taux de compression est alors :

$$\tau_{[\%]} = \left( 1 - \frac{n_D}{S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_N}} \right) \times 100 \quad (2.44)$$

### 2.6.6 Complexité et occupation mémoire

Nous donnons maintenant la complexité et l'occupation mémoire de notre méthode pour une modélisation multidimensionnelle multicomposante. Nous notons ici :

- $P_+^N, P_-^N, P_*^N$  et  $P_{/}^N$  le coût d'une opération, respectivement une addition, une soustraction, une multiplication ou une division, d'un polynôme à  $N$  variables avec un scalaire ;
- $P_a^N, P_s^N, P_m^N$  et  $P_d^N$  le coût d'une opération, respectivement une addition, une soustraction, une multiplication ou une division, entre deux polynômes à  $N$  variables ;
- $P_E^N$  le coût de l'évaluation d'un polynôme à  $N$  variables en un point ;
- $P_I^N$  le coût de l'évaluation d'une intégrale multiple ;

Ces opérations sont données ici par ordre croissant de complexité. D'une façon générale, nous pouvons admettre que le coût d'une opération est proportionnelle au nombre de variables du polynôme. Par exemple, nous avons :

$$P_I^1 < P_I^2 < \dots < P_I^N \quad (2.45)$$

La complexité des différentes opérations est donnée TABLEAU 2.2. L'occupation mémoire de ces opérations est donnée TABLEAU 2.3.

## 2.7 Choix d'une base de polynômes

Le TABLEAU 2.1 présente différentes familles de polynômes connues. Par la suite, nous utilisons uniquement les polynômes de Legendre. À partir des paramètres donnés dans cette table, la formule de récurrence (2.20) permettant de générer une base bidimensionnelle devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{-1,j} = 0 \\ P_{i,-1} = 0 \\ P_{0,0} = 1 \\ P_{i+1,j} = \frac{2i+1}{i+1} x_1 P_{i,j} - \frac{i}{i+1} P_{i-1,j} \\ P_{i,j+1} = \frac{2j+1}{j+1} x_2 P_{i,j} - \frac{j}{j+1} P_{i,j-1} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

TABLEAU 2.2 – Complexité des différentes opérations pour une modélisation multidimensionnelle multicomposante.

Génération de la base	$\Theta(n_D \times (P_+^N + 2 P_*^N + P_s^N + P_m^N))$
Approximation de la séquence Méthode directe	$\Theta(n_C \times n_D \times (P_m^N + S_I \times C \times (P_m^N + P_I^N)))$
Approximation de la séquence Méthode optimisée	$\Theta(n_D \times (P_m^N + S_I \times P_I^N) + (n_C \times n_D \times S_I \times C \times P_m^N))$
Reconstruction	$\Theta(n_C \times n_D \times C \times (P_*^N + P_a^N) + S_I \times C \times P_E^N)$

TABLEAU 2.3 – Occupation mémoire des différentes opérations pour une modélisation multidimensionnelle multicomposante.

Génération de la base	$\sum_{d=0}^D \frac{\prod_{n=1}^{N-1} (d+n)}{(N-1)!} M^d \text{ réels}$
Approximation de la séquence Méthode directe	$\sum_{d=0}^D \frac{\prod_{n=1}^{N-1} (d+n)}{(N-1)!} M^d + S_I \times C \text{ réels}$
Approximation de la séquence Méthode optimisée	$\sum_{d=0}^D \frac{\prod_{n=1}^{N-1} (d+n)}{(N-1)!} M^d + S_I \times C + n_D \times S_I \text{ réels}$
Reconstruction	$\sum_{d=0}^D \frac{\prod_{n=1}^{N-1} (d+n)}{(N-1)!} M^d \text{ réels}$

Pour pouvoir comparer directement les différents coefficients de projection entre eux, nous normalisons cette base. La FIGURE 2.7 donne les valeurs des polynômes de Legendre pour une base bidimensionnelle de degré 2 normalisée. La FIGURE 2.8 et la FIGURE 2.9 représentent les différents polynômes qui composent une base de Legendre de degré 5. Nous rappelons que ces

polynômes sont définis dans le domaine  $\Omega = [-1; 1]^2$  et que la fonction de poids associée est  $\omega(x_1, x_2) = 1$ . L'équation (2.25) se simplifie alors en :

$$\begin{cases} \tilde{v}_{i,j}^1 = \iint_{\Omega} \mathcal{V}^1(x_1, x_2) P_{i,j} dx_1 dx_2 \\ \tilde{v}_{i,j}^2 = \iint_{\Omega} \mathcal{V}^2(x_1, x_2) P_{i,j} dx_1 dx_2 \end{cases} \quad (2.47)$$

avec  $i + j \leq D$ .

	$(x_2)^0$	$(x_2)^1$	$(x_2)^2$
$(x_1)^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}x_2}{2}$	$\frac{\sqrt{5}(3x_2^2-1)}{4}$
$(x_1)^1$	$\frac{\sqrt{3}x_1}{2}$	$\frac{3x_1x_2}{2}$	
$(x_1)^2$	$\frac{\sqrt{5}(3x_1^2-1)}{4}$		

$\mathcal{B}_2 =$

FIGURE 2.7 – Valeurs des premiers polynômes de Legendre pour une base bidimensionnelle orthonormale de degré 2.

Le choix des polynômes de Legendre se justifie pour plusieurs raisons. Tout d'abord, nous désirons effectuer une modélisation globale des champs de déplacement. La fonction de poids  $\omega(x_1, x_2) = 1$  permet alors de donner la même importance à tous les vecteurs du champ. De plus, cette fonction de poids simplifie considérablement les équations permettant de calculer les coefficients de projection, ce qui diminue les temps de calcul. Un autre point concerne l'interprétation physique du mouvement. En effet, pour certaines familles de polynômes, il est possible de donner une signification physique aux premiers polynômes de la base. Ce point est étudié dans le prochain chapitre.

Par la suite, nous utilisons donc exclusivement une base composée des polynômes de Legendre normalisés. L'étude d'autres familles de polynômes n'entre pas dans le cadre de ces travaux.

## 2.8 Conclusion

Ce chapitre pose les bases théoriques de notre méthode. Celle-ci permet de modéliser des champs de déplacement par des combinaisons linéaires de polynômes. Son principe consiste



à projeter les différentes composantes du champ de déplacement sur les polynômes qui composent la base orthogonale. Cette projection fournit alors un ensemble de coefficients, appelés *coefficients de projection*, caractérisant le mouvement étudié.

Le modèle proposé présente un certain nombre de propriétés intéressantes. Tout d'abord, notre méthode permet d'obtenir une expression analytique du mouvement étudié. Les calculs différentiels, tels que la divergence ou le rotationnel, et les calculs intégraux sur le champ de déplacement se ramènent donc à des calculs polynomiaux. De plus, la base de polynômes est fixée sans connaissance *a priori* du mouvement. Nous pouvons alors comparer différentes séquences en étudiant directement les coefficients de projection. Par ailleurs, le processus de projection d'un champ de déplacement ne dépend pas des autres champs de la séquence. Cela permet donc de projeter un champ sans connaître l'intégralité de la séquence et le temps de calcul lié à la projection de ce champ est constant, quel que soit le nombre de champs à traiter. Finalement, nous avons montré qu'il est possible de généraliser facilement notre méthode dans le but de traiter des champs multidimensionnels multicomposantes.

Dans les prochains chapitres, nous appliquons notre méthode sur des champs synthétiques et expérimentaux.

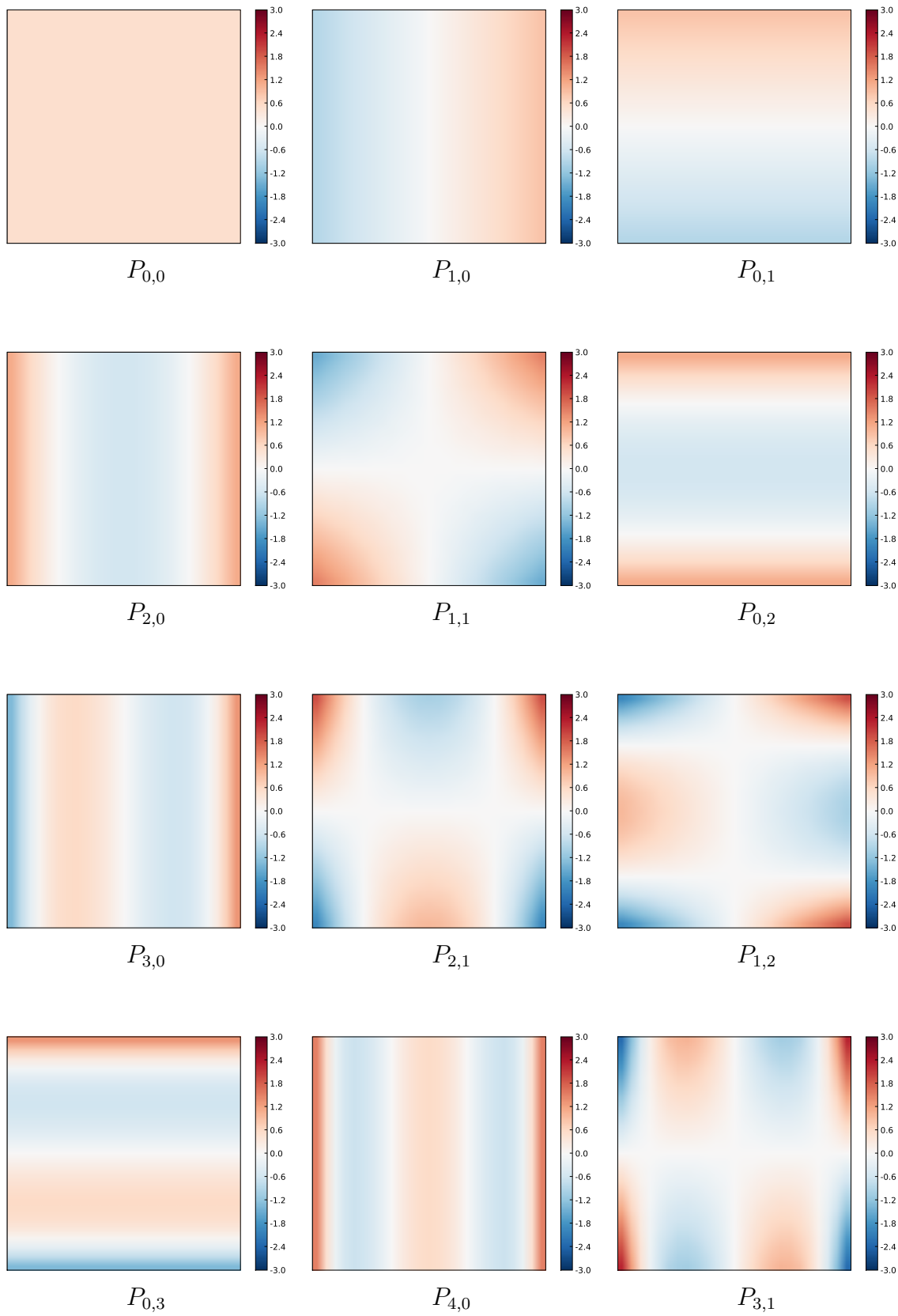


FIGURE 2.8 – Représentation des différents polynômes qui composent une base de Legendre de degré 5.

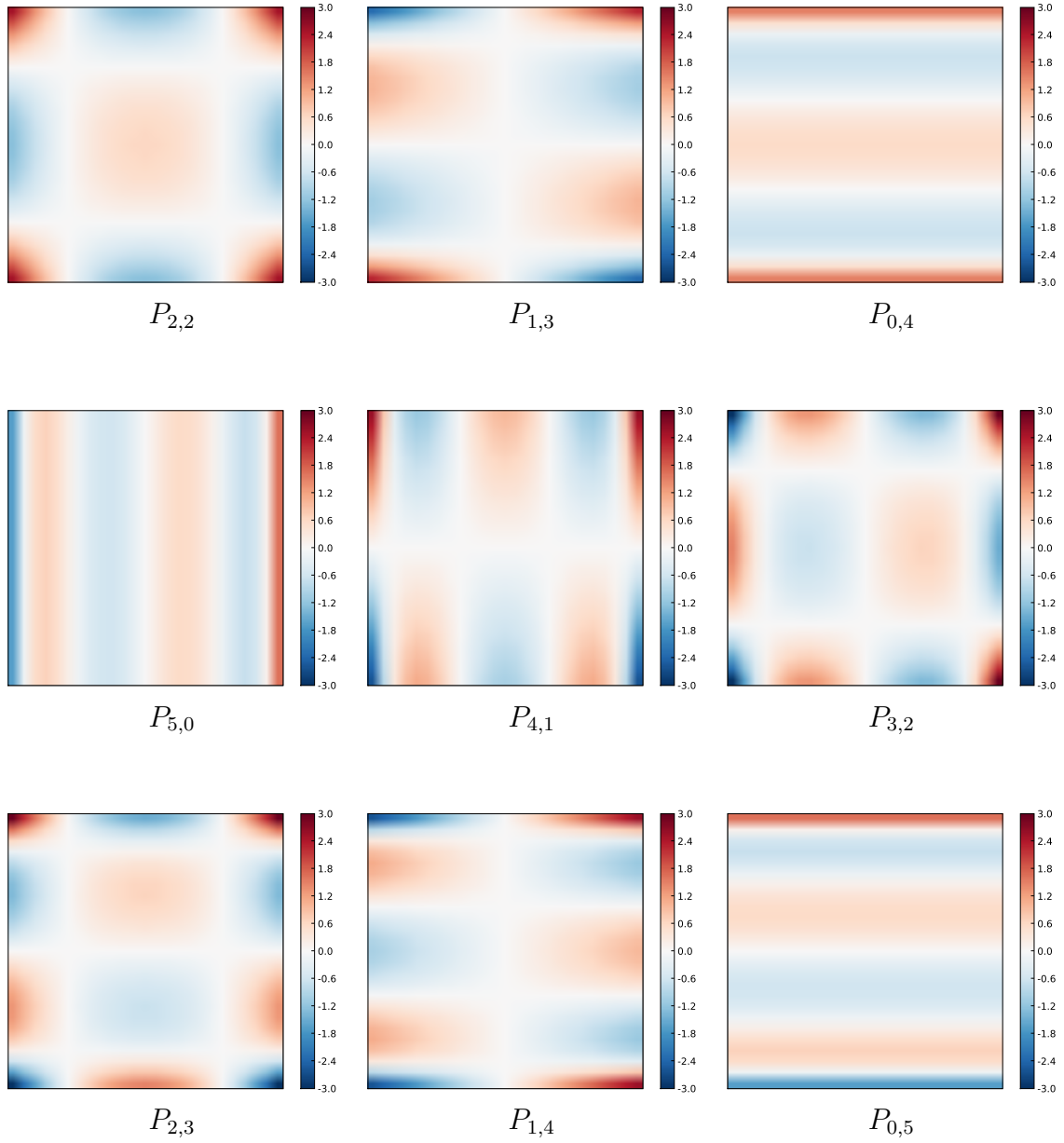


FIGURE 2.9 – Représentation des différents polynômes qui composent une base de Legendre de degré 5 (suite).



---

## CHAPITRE 3

---

# INTERPRÉTATION DU MOUVEMENT

---

Dans ce chapitre, nous appliquons notre méthode sur des séquences synthétiques et expérimentales. Tout d'abord, nous analysons le comportement de notre modèle sur des champs synthétiques affines. Nous évaluons ensuite sa résistance au bruit. Finalement, nous appliquons notre méthode sur des séquences cinématographiques et nous montrons comment extraire certaines informations sémantiques à partir des coefficients de projection.

### 3.1 Étude de mouvements affines

#### 3.1.1 Étude de mouvements affines « élémentaires »

Dans un premier temps, nous étudions des mouvements affines synthétiques. Par la suite, nous qualifions de mouvement affine « élémentaire » l'un des quatre mouvements suivants : une translation horizontale, une translation verticale, une rotation ou une divergence. Ces mouvements affines sont générés à partir de l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V}^1 \\ \mathcal{V}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} div_{x_1} & -rot_{x_1} \\ rot_{x_2} & div_{x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tr_{x_1} \\ tr_{x_2} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

avec  $tr_{x_1}$  et  $tr_{x_2}$  les quantités de translation,  $rot_{x_1}$  et  $rot_{x_2}$  les quantités de rotation et  $div_{x_1}$  et  $div_{x_2}$  les quantités de divergence selon  $x_1$  et  $x_2$ . Nous générons alors quatre champs de taille  $100 \times 100$  représentant chacun un mouvement affine « élémentaire » différent. La valeur des différents paramètres utilisés pour générer ces quatre mouvements est donnée TABLEAU 3.1. Les champs de déplacement obtenus sont présentés FIGURE 3.1.

Comme nous l'avons précisé au chapitre 2, nous utilisons une base composée des polynômes de Legendre normalisés (cf. FIGURE 2.7). Les polynômes qui constituent une base de degré 1 sont les suivants :

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ P_{0,0} = \frac{1}{2}, \quad P_{1,0} = \frac{\sqrt{3}}{2} x_1, \quad P_{0,1} = \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 \right\} \quad (3.2)$$

Nous projetons alors les quatre champs sur cette base  $\mathcal{B}_1$ . Nous obtenons les coefficients de projection présentés TABLEAU 3.2. À partir de l'équation (2.13), nous calculons l'erreur de mo-

TABLEAU 3.1 – Paramètres utilisés pour la génération des quatre mouvements affines « élémentaires ». Ces quatre mouvements sont : une translation horizontale, une translation verticale, une rotation et une divergence.

	$tr_{x_1}$	$tr_{x_2}$	$rot_{x_1}$	$rot_{x_2}$	$div_{x_1}$	$div_{x_2}$
(a) - Translation horizontale	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
(b) - Translation verticale	0.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
(c) - Rotation	0.0	0.0	0.5	0.5	0.0	0.0
(d) - Divergence	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	0.5

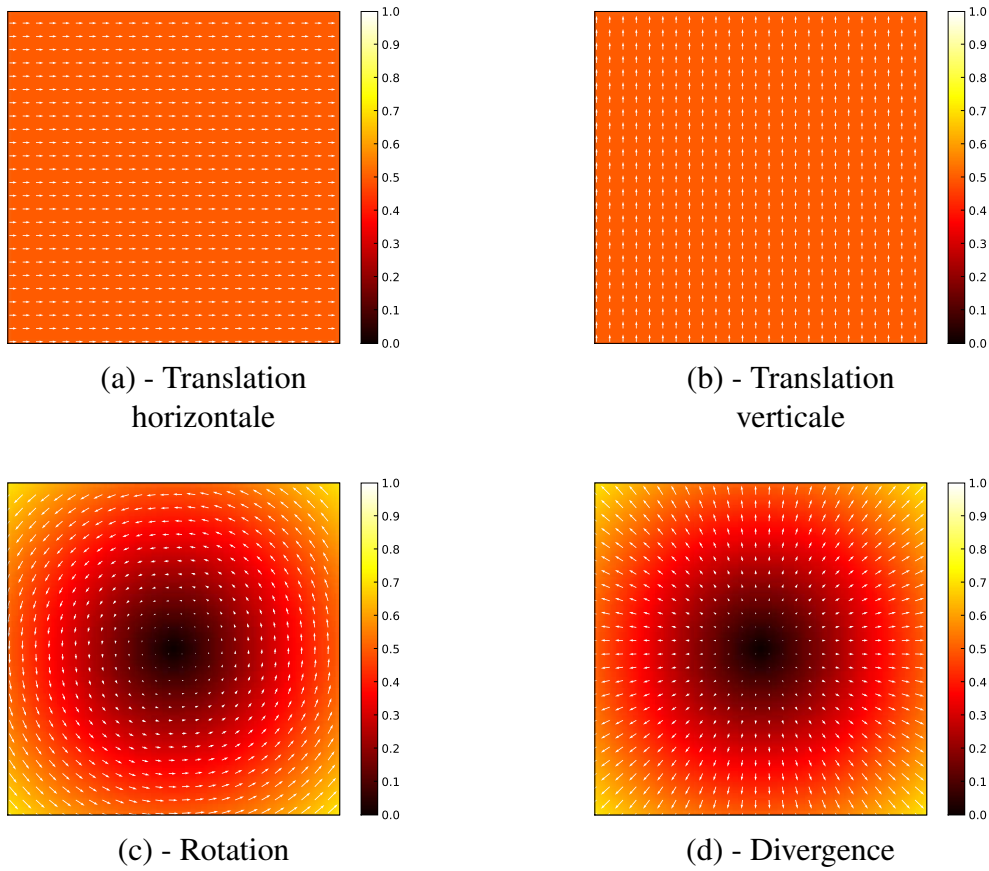


FIGURE 3.1 – Représentation des quatre mouvements affines « élémentaires ». Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et seul un vecteur sur quatre est représenté. Les mesures données sont exprimées en pixel.

délisation de notre méthode. Pour obtenir une erreur indépendante de la quantité de mouvement des champs de déplacement, nous normalisons cette erreur par la norme du champ original. Elle est donc calculée de la façon suivante :

$$\mathcal{E}_{[\%]} = \frac{\sqrt{\|\mathcal{F}_o\|^2 - ((\tilde{v}_{0,0}^1)^2 + (\tilde{v}_{1,0}^1)^2 + (\tilde{v}_{0,1}^1)^2 + (\tilde{v}_{0,0}^2)^2 + (\tilde{v}_{1,0}^2)^2 + (\tilde{v}_{0,1}^2)^2)}}{\|\mathcal{F}_o\|} \times 100 \quad (3.3)$$

avec  $\mathcal{F}_o$  le champ original et  $\tilde{v}_{i,j}^c$  les coefficients de projection. Nous constatons alors que, pour les quatre champs étudiés, l'erreur de modélisation est inférieure à 1 %. Cette erreur est essentiellement due à la perte de précision liée à l'approximation du calcul des intégrales présenté en

TABLEAU 3.2 – Coefficients de projection obtenus après projection des quatre mouvements affines « élémentaires » sur une base de degré 1.

	$\tilde{v}_{0,0}^1$	$\tilde{v}_{0,0}^2$	$\tilde{v}_{1,0}^1$	$\tilde{v}_{1,0}^2$	$\tilde{v}_{0,1}^1$	$\tilde{v}_{0,1}^2$
(a) - Translation horizontale	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
(b) - Translation verticale	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
(c) - Rotation	0.0	0.0	0.0	0.58	-0.58	0.0
(d) - Divergence	0.0	0.0	0.58	0.0	0.0	0.58

(2.25). Nous pouvons vérifier ces résultats en recalculant, à partir des coefficients de projection obtenus, les expressions analytiques de ces mouvements affines. Nous constatons alors que les expressions calculées sont égales aux expressions originales. Notre modèle permet donc de modéliser, sans perte d'information, ces quatre mouvements affines « élémentaires » en utilisant une base de degré 1 composée des polynômes de Legendre. Cette base étant orthogonale, si le degré est supérieur à 1 alors les coefficients de projection  $\tilde{v}_{i,j}^1$  et  $\tilde{v}_{i,j}^2$  seront nuls pour tout  $i + j > 1$ .

Par ailleurs, l'expression générale de notre modèle, calculé à partir d'une base de degré 1, est la suivante :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}^1 &= \tilde{v}_{0,0}^1 P_{0,0} + \tilde{v}_{1,0}^1 P_{1,0} + \tilde{v}_{0,1}^1 P_{0,1} \\ \tilde{\mathcal{V}}^2 &= \tilde{v}_{0,0}^2 P_{0,0} + \tilde{v}_{1,0}^2 P_{1,0} + \tilde{v}_{0,1}^2 P_{0,1} \end{cases} \quad (3.4)$$

Connaissant les polynômes  $P_{0,0}$ ,  $P_{1,0}$  et  $P_{0,1}$  qui composent la base  $\mathcal{B}_1$ , l'expression analytique de notre modèle devient :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}^1 &= \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{v}_{1,0}^1 x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{v}_{0,1}^1 x_2 \\ \tilde{\mathcal{V}}^2 &= \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{v}_{1,0}^2 x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{v}_{0,1}^2 x_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Or, l'expression analytique d'un mouvement affine peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathcal{V}^1 &= tr_{x_1} + div_{x_1} x_1 - rot_{x_1} x_2 \\ \mathcal{V}^2 &= tr_{x_2} + rot_{x_2} x_1 + div_{x_2} x_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

Nous constatons alors qu'il existe un lien direct entre les paramètres  $tr_{x_1}$ ,  $tr_{x_2}$ ,  $div_{x_1}$ ,  $div_{x_2}$ ,  $rot_{x_1}$  et  $rot_{x_2}$  d'un mouvement affine et les coefficients de projection  $\tilde{v}_{i,j}^1$  et  $\tilde{v}_{i,j}^2$ . Nous en déduisons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{0,0}^1 &= 2 tr_{x_1} & \tilde{v}_{0,1}^1 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} rot_{x_1} & \tilde{v}_{1,0}^1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} div_{x_1} \\ \tilde{v}_{0,0}^2 &= 2 tr_{x_2} & \tilde{v}_{1,0}^2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} rot_{x_2} & \tilde{v}_{0,1}^2 &= \frac{2}{\sqrt{3}} div_{x_2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Grâce à ces relations, nous sommes capables de donner une signification physique aux six coefficients de projection  $\tilde{v}_{0,0}^1$ ,  $\tilde{v}_{1,0}^1$ ,  $\tilde{v}_{0,1}^1$ ,  $\tilde{v}_{0,0}^2$ ,  $\tilde{v}_{1,0}^2$  et  $\tilde{v}_{0,1}^2$  d'une base de degré 1 composée des polynômes de Legendre.

La même approche peut être effectuée pour un modèle biquadratique. En effet, l'expression générale de ce modèle est la suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{V}^1 &= a_{2,0} x_1^2 + a_{0,2} x_2^2 + a_{1,1} x_1 x_2 + a_{1,0} x_1 + a_{0,1} x_2 + a_{0,0} \\ \mathcal{V}^2 &= b_{2,0} x_1^2 + b_{0,2} x_2^2 + b_{1,1} x_1 x_2 + b_{1,0} x_1 + b_{0,1} x_2 + b_{0,0} \end{cases} \quad (3.8)$$

Or, nous avons vu au chapitre précédent qu'une base de degré 2 est constituée des polynômes suivants (cf. FIGURE 2.7) :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 = \{ & P_{0,0} = \frac{1}{2}, \quad P_{1,0} = \frac{\sqrt{3}}{2} x_1, \quad P_{0,1} = \frac{\sqrt{3}}{2} x_2, \\ & P_{1,1} = \frac{3}{2} x_1 x_2, \quad P_{2,0} = \frac{\sqrt{5}}{4} (3 x_1^2 - 1), \quad P_{0,2} = \frac{\sqrt{5}}{4} (3 x_2^2 - 1) \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nous en déduisons donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^1 - \frac{\sqrt{5}}{4} (\tilde{v}_{2,0}^1 - \tilde{v}_{0,2}^1) & a_{1,0} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{v}_{1,0}^1 & a_{0,1} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{v}_{0,1}^1 \\ a_{1,1} &= \frac{3}{2} \tilde{v}_{1,1}^1 & a_{2,0} &= \frac{3\sqrt{5}}{4} \tilde{v}_{2,0}^1 & a_{0,2} &= \frac{3\sqrt{5}}{4} \tilde{v}_{0,2}^1 \\ b_{0,0} &= \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^2 - \frac{\sqrt{5}}{4} (\tilde{v}_{2,0}^2 - \tilde{v}_{0,2}^2) & b_{1,0} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{v}_{1,0}^2 & b_{0,1} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{v}_{0,1}^2 \\ b_{1,1} &= \frac{3}{2} \tilde{v}_{1,1}^2 & b_{2,0} &= \frac{3\sqrt{5}}{4} \tilde{v}_{2,0}^2 & b_{0,2} &= \frac{3\sqrt{5}}{4} \tilde{v}_{0,2}^2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.1.2 Étude de la valeur des coefficients

Nous étudions maintenant l'influence de la valeur de ces coefficients de projection. Pour cela, nous limitons notre étude au mouvement de divergence présenté précédemment. À partir de l'équation (3.1), nous générons quatre champs de déplacement en faisant varier simultanément les paramètres  $div_{x_1}$  et  $div_{x_2}$  selon les valeurs suivantes : 0.0, 0.05, 0.25 et 0.5. Les champs de déplacement obtenus sont présentés FIGURE 3.2. Nous projetons alors ces champs sur la base  $\mathcal{B}_1$ . La FIGURE 3.3 représente, pour chaque composante, l'évolution des coefficients de projection obtenus en fonction de la valeur de ces paramètres. Tout d'abord, nous constatons que seuls les coefficients  $\tilde{v}_{1,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,1}^2$  évoluent. Les autres coefficients restent nuls. Ceci confirme la relation entre les paramètres d'un modèle affine et les coefficients de projection présentée en (3.7). Nous constatons également que la valeur des coefficients de projection  $\tilde{v}_{1,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,1}^2$  est proportionnelle à la valeur des paramètres  $div_{x_1}$  et  $div_{x_2}$ . La valeur des coefficients de projection nous renseigne donc sur la quantité de mouvement contenue dans chaque champ. S'il n'y a pas de mouvement alors tous les coefficients de projection sont nuls. Des résultats similaires sont obtenus pour les autres mouvements affines « élémentaires ».

### 3.1.3 Étude de mouvements affines « composés »

Nous étudions maintenant le comportement des coefficients de notre modèle sur des mouvements composés de plusieurs mouvements affines « élémentaires ». Le premier mouvement représente un mouvement de rotation excentrée, c'est à dire la composition d'une rotation, d'une translation horizontale et d'une translation verticale. Le deuxième mouvement est une combinaison d'une rotation et d'une divergence. Les paramètres utilisés pour générer ces deux mouvements sont donnés TABLEAU 3.3. Une représentation de ces deux mouvements est donnée FIGURE 3.4.

Nous projetons ces champs sur la base  $\mathcal{B}_1$ . Pour chaque champ, nous obtenons les coefficients de projection présentés TABLEAU 3.4. Comme pour les mouvements affines « élémen-



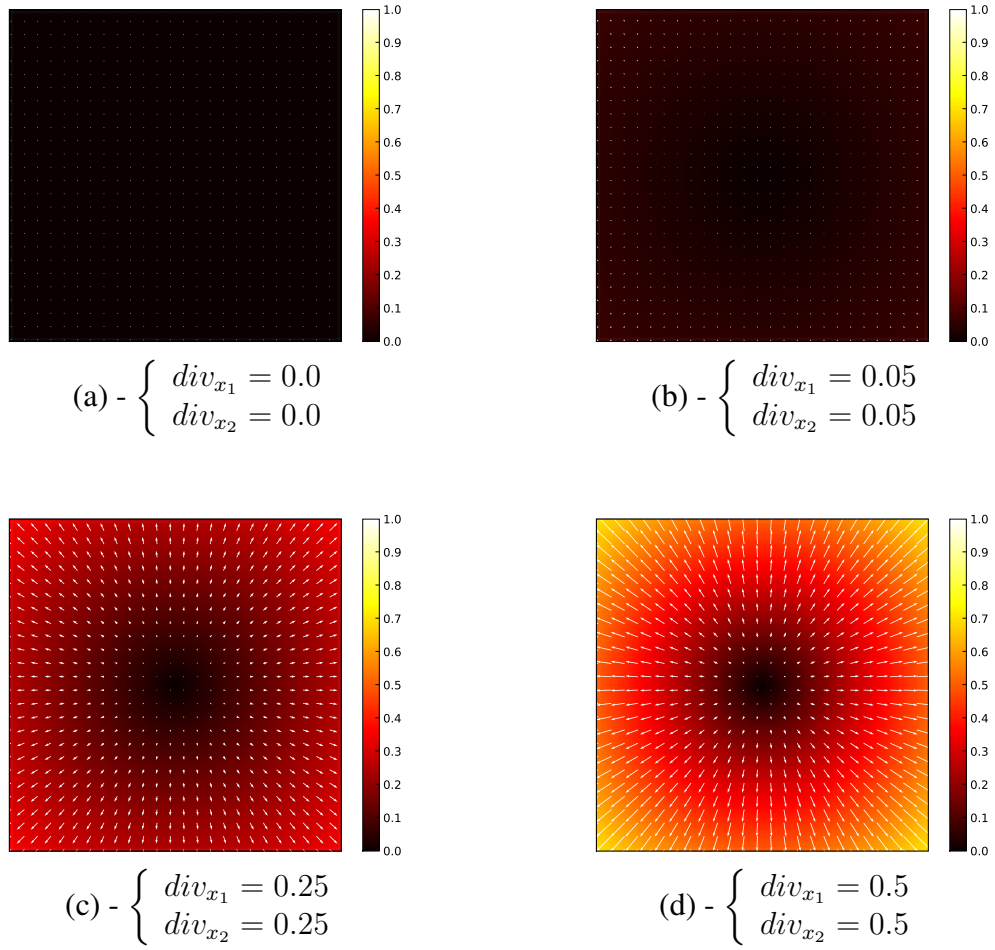


FIGURE 3.2 – Représentation de quatre mouvements divergents ayant des quantités de mouvement différentes. Pour ces quatre mouvements, les paramètres  $tr_{x_1}$ ,  $tr_{x_2}$ ,  $rot_{x_1}$  et  $rot_{x_2}$  sont nuls. Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et seul un vecteur sur quatre est représenté. Les mesures données sont exprimées en pixel.

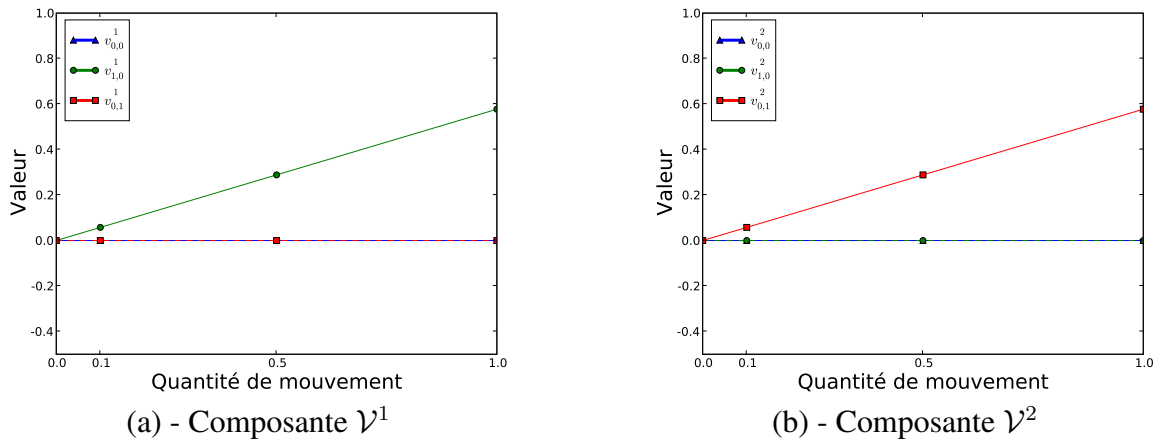


FIGURE 3.3 – Évolution des coefficients de projection en fonction de la quantité de mouvement pour (a) - la composante  $\mathcal{V}^1$  et (b) - la composante  $\mathcal{V}^2$ . Pour la composante  $\mathcal{V}^1$ , les coefficients  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,1}^1$  restent nuls. Pour la composante  $\mathcal{V}^2$ , les coefficients  $\tilde{v}_{0,0}^2$  et  $\tilde{v}_{1,0}^2$  restent nuls.

TABLEAU 3.3 – Paramètres utilisés pour la génération de mouvements affines « composés ». Ces mouvements représentent : (a) - une rotation excentrée, c'est-à-dire la composition d'un mouvement de rotation, un mouvement de translation horizontale et un mouvement de translation verticale, et (b) - la composition d'une rotation et d'une divergence.

	$tr_{x_1}$	$tr_{x_2}$	$rot_{x_1}$	$rot_{x_2}$	$div_{x_1}$	$div_{x_2}$
(a) - Rotation excentrée	0.5	-0.5	0.5	0.5	0.0	0.0
(b) - Rotation + divergence	0.0	0.0	0.5	0.5	0.5	0.5

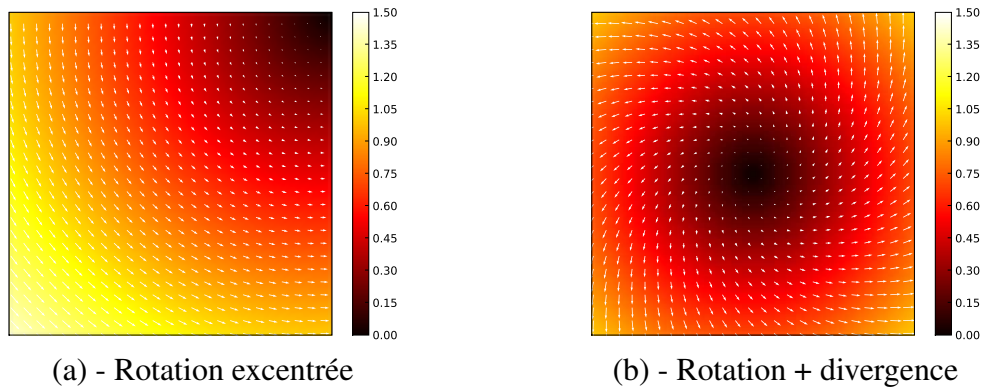


FIGURE 3.4 – Représentation de deux mouvements affines « composés ». Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et seul un vecteur sur quatre est représenté. Les mesures données sont exprimées en pixel.

TABLEAU 3.4 – Coefficients de projection obtenus après projection de deux mouvements affines « composés » sur une base de degré 1.

	$\tilde{v}_{0,0}^1$	$\tilde{v}_{0,0}^2$	$\tilde{v}_{1,0}^1$	$\tilde{v}_{1,0}^2$	$\tilde{v}_{0,1}^1$	$\tilde{v}_{0,1}^2$
(a) - Rotation excentrée	1.0	-1.0	0.0	0.58	-0.58	0.0
(b) - Rotation + divergence	0.0	0.0	0.58	0.58	-0.58	0.58

taires », l'erreur  $\mathcal{E}$ , calculée à partir de l'équation (3.3), est inférieure à 1 % pour les deux mouvements. Des résultats similaires sont obtenus pour d'autres mouvements « composés ». Comme l'on pouvait s'y attendre, notre méthode permet donc de modéliser des mouvements affines composés de plusieurs mouvements « élémentaires ». De plus, en étudiant les équations présentées en (3.7), nous constatons que nous avons une relation bijective entre les paramètres du modèle affine et les coefficients de projection de notre modèle. Nous sommes donc capable de retrouver les différents mouvements affines « élémentaires » qui composent chaque mouvement affine « composé ».

### 3.1.4 Étude de mouvements affines aléatoires

Finalement, nous étudions la qualité de modélisation de notre méthode sur des champs de déplacement représentant des mouvements affines quelconques. Pour cela, nous générons 100 champs de taille  $100 \times 100$ . Pour chaque champ, nous tirons aléatoirement selon une distribution

uniforme les différents paramètres affines  $tr_{x_1}, tr_{x_2}, rot_{x_1}, rot_{x_2}, div_{x_1}$  et  $div_{x_2}$ . Pour chaque valeur, le tirage est compris dans l'intervalle  $[-5; 5]$ . Nous modélisons alors ces 100 champs avec une base de degré 1 puis nous analysons l'erreur de modélisation grâce à l'équation (3.3). Nous constatons alors que, pour tous les champs, l'erreur de modélisation est également inférieure à 1 %. Notre méthode permet donc de modéliser tout type de mouvement affine. De plus, en étudiant l'erreur moyenne et l'écart-type associés à chaque coefficient, nous remarquons que ces deux valeurs restent faibles et relativement similaires pour tous les coefficients : notre méthode ne privilégie pas de coefficient de projection. Tous les mouvements affines sont donc modélisés avec la même importance.

## 3.2 Résistance au bruit

Nous étudions maintenant la résistance au bruit de notre modèle. Pour cela, nous étudions deux mouvements synthétiques. Le premier mouvement correspond au mouvement de rotation étudié précédemment. Une représentation de ce mouvement affine ainsi que les profils des vitesses horizontales et verticales associés à la droite d'équation  $y = 0$  sont donnés FIGURE 3.5. Le second mouvement représente un tourbillon généré à partir de l'équation suivante :

$$f(z) = \frac{i \Gamma (z - z_0) (1 - e^{-\frac{|z-z_0|^2}{s}})}{2 \pi |z - z_0|^2} \quad (3.11)$$

avec  $z_0 \in \mathbb{C}$  le centre du tourbillon,  $\Gamma$  sa circulation et  $s$  un coefficient de diffusion. Ce mouvement n'est donc pas un mouvement affine. Une représentation pour  $z_0 = 0$ ,  $\Gamma = 3$  et  $s = 0.01$  ainsi que les profils des vitesses horizontales et verticales associés à la droite d'équation  $y = 0$  sont donnés FIGURE 3.6. En étudiant ces profils, nous constatons qu'une grande partie de l'énergie est concentrée près du centre du tourbillon. La modélisation de ce mouvement est plus complexe que le mouvement de rotation à cause notamment de l'exponentielle présente dans la formule.

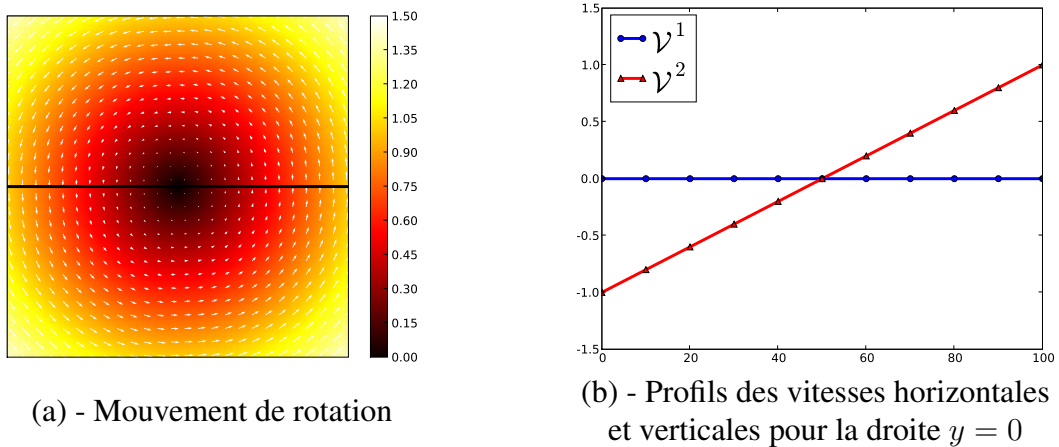


FIGURE 3.5 – Mouvement « rotation » : (a) - représentation du mouvement de rotation. Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et seul un vecteur sur quatre est représenté. Les mesures données sont exprimées en pixel. (b) - profils des vitesses horizontales et verticales pour la droite  $y = 0$ .

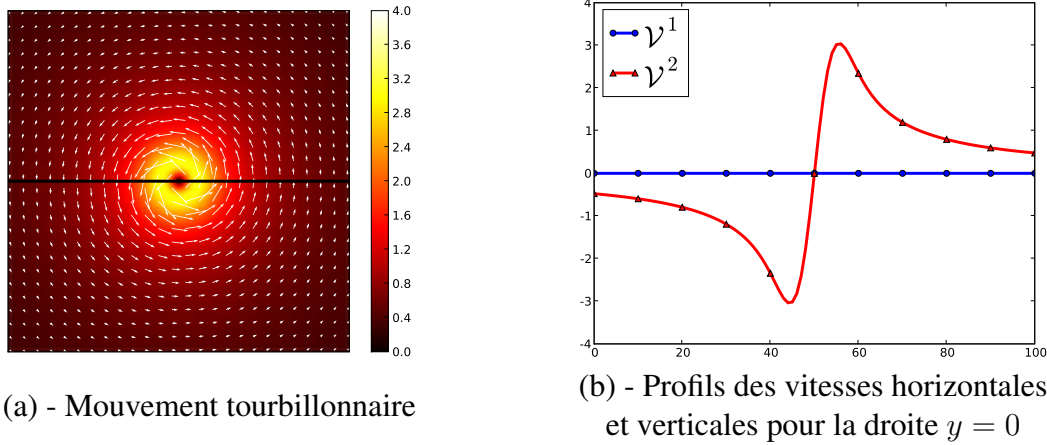


FIGURE 3.6 – Mouvement « tourbillon » : (a) - représentation du mouvement tourbillonnaire. Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et seul un vecteur sur quatre est représenté. Les mesures données sont exprimées en pixel. (b) - profils des vitesses horizontales et verticales pour la droite  $y = 0$ .

### 3.2.1 Étude du bruit gaussien

Tout d'abord, nous évaluons la résistance au bruit gaussien. Nous étudions ici deux paramètres différents : la quantité de bruit ajoutée et le degré de la base. La quantité de bruit ajoutée est mesurée grâce au *rapport signal-sur-bruit* (SNR). Ce rapport permet de déterminer l'écart-type de la gaussienne, de moyenne nulle, utilisée pour bruiser les champs de déplacement. Nous le faisons varier pour les valeurs suivantes : 50, 10 et 5. Concernant le degré de la base, nous décidons de le faire varier entre 0 et 35. Pour effectuer une étude statistique, nous générons ici, pour chaque mouvement et pour chaque quantité de bruit, une série composée de 10 champs bruités de taille  $100 \times 100$ . Nous projetons alors ces différents champs sur une base dont le degré varie entre 0 et 35 puis nous reconstruisons, à partir des coefficients de projection obtenus, les champs de déplacement. Nous comparons alors les champs originaux et les champs reconstruits à l'aide de la mesure suivante :

$$\mathcal{E}_{[\%]} = \frac{1}{S_{i_1} \times S_{i_2}} \sum_{s_{i_1}=1}^{S_{i_1}} \sum_{s_{i_2}=1}^{S_{i_2}} \frac{\|\vec{v}_o(s_{i_1}, s_{i_2}) - \vec{v}_r(s_{i_1}, s_{i_2})\|}{\|\vec{v}_o\|} \times 100 \quad (3.12)$$

avec  $\vec{v}_o$  un vecteur du champ original,  $\vec{v}_r$  un vecteur du champ reconstruit,  $\|\vec{v}_o\|$  la norme du vecteur moyen du champ original et  $S_{i_1} \times S_{i_2}$  la taille des champs de déplacement. Cette mesure représente l'écart moyen entre chaque vecteur du champ original et son vecteur correspondant dans le champ reconstruit. Pour obtenir une mesure indépendante de la dynamique du mouvement, nous normalisons cette erreur par la norme du vecteur moyen du champ original. Elle est exprimée en pourcent. La FIGURE 3.7 présente l'erreur moyenne, calculée à partir des 10 champs de chaque série, entre les champs originaux et les champs reconstruits en fonction de la quantité de bruit ajoutée et du degré de la base utilisée pour le mouvement de rotation et le mouvement tourbillonnaire. Concernant le mouvement de rotation, nous constatons que l'utilisation d'une base de degré 0 entraîne une erreur de 100 %. En effet, nous avons vu au début de ce chapitre que les coefficients de projection  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,0}^2$  associés à cette base n'apportent pas d'information sur ce mouvement. Par contre, celui-ci est correctement modélisé avec une base de degré 1. L'utilisation d'une telle base contraint alors fortement le modèle. Dans ce cas, l'erreur

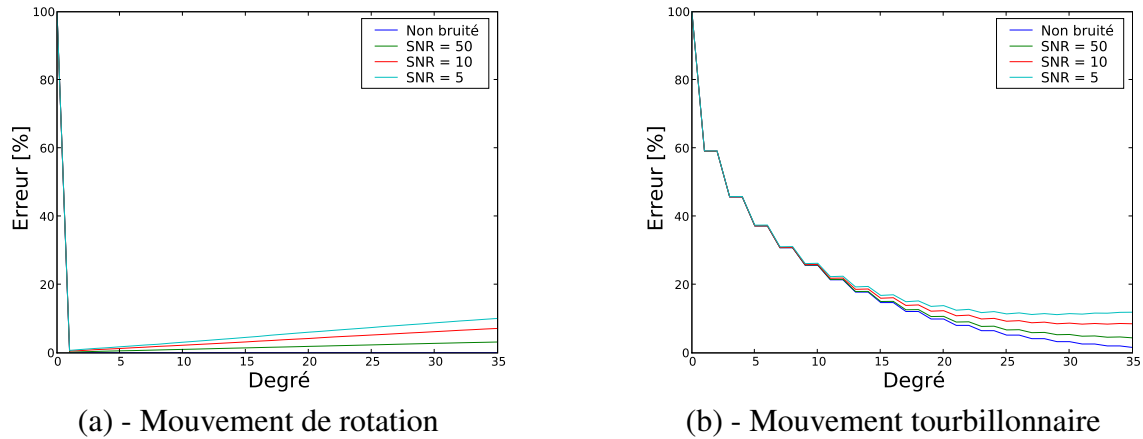


FIGURE 3.7 – Représentation de l'erreur de modélisation en fonction du degré de la base pour des quantités de bruit gaussien variables, pour (a) - le mouvement de rotation et (b) - le mouvement tourbillonnaire.

de modélisation tend vers 0 même si la quantité de bruit ajoutée est importante. En utilisant des degrés supérieurs, nous sommes capables de modéliser des mouvements plus complexes. Pour ce mouvement affine, le bruit est alors progressivement intégré dans le modèle, ce qui explique l'augmentation de l'erreur. Concernant le mouvement tourbillonnaire, il est nécessaire d'utiliser un degré élevé pour obtenir une bonne représentation du mouvement. Les degrés faibles modélisent essentiellement l'information. À partir d'un certain degré, dépendant ici de la quantité de bruit ajoutée, l'erreur cesse de diminuer et se met à augmenter. Cela signifie que chaque degré supérieur à ce seuil modélise plus de bruit que d'information. La FIGURE 3.20 représente, pour les deux mouvements, des exemples de champs bruités et reconstruits avec une base de degré 5. En étudiant ces champs reconstruits, nous constatons que notre méthode lisse fortement le signal bruité. Dans le cas de la rotation, ce lissage permet d'éliminer une grande quantité de bruit. De ce fait, les champs reconstruits ressemblent fortement aux champs originaux. Mais, pour le mouvement tourbillonnaire, ce lissage est trop important. L'utilisation d'une base de degré 5 ne permet donc pas de modéliser ce mouvement, même si la quantité de bruit ajoutée est faible, voire nulle. La FIGURE 3.21 représente, pour les deux mouvements, des exemples de champs bruités et reconstruits avec une base de degré 25. Avec un tel degré, le mouvement tourbillonnaire est correctement modélisé. Si la quantité de bruit ajoutée est importante, le lissage du signal permet tout de même de reconstruire un champ de déplacement proche du champ original. Mais, dans le cas de la rotation, notre méthode modélise alors une partie du bruit, ce qui entraîne une dégradation des résultats par rapport à des degrés plus faibles. Le degré de la base est donc un paramètre important de notre méthode. Il doit être fixé en fonction de la complexité du mouvement à modéliser et de la quantité de bruit contenue dans la séquence.

### 3.2.2 Étude du bruit impulsionnel

Nous évaluons maintenant la résistance au bruit impulsionnel. Nous appelons ici bruit impulsionnel l'absence de certains vecteurs (leur norme est forcée à 0) dans le champ de déplacement. Ce bruit simule, par exemple, des champs obtenus après une étape de post-traitement visant à éliminer les vecteurs incohérents ou ayant subi des erreurs durant leur transmission. Comme précédemment, les paramètres du test sont la quantité de bruit ajoutée et le degré de la base. La quantité de bruit ajoutée correspond au rapport, exprimé en pourcent, entre le nombre

de vecteurs forcés à 0 et le nombre de vecteurs total du champ de déplacement. Nous faisons varier ce paramètre pour les valeurs suivantes : 5 %, 10 % et 25 %. Comme pour le bruit gaussien, le degré de la base varie entre 0 et 35. Nous effectuons alors le même processus de test que précédemment. La FIGURE 3.8 présente l'erreur moyenne, calculée à partir des 10 champs de chaque série, entre les champs originaux et les champs reconstruits en fonction de la quantité de bruit ajoutée et du degré de la base utilisé pour le mouvement de rotation et le mouvement tourbillonnaire. La FIGURE 3.22, située à la fin de ce chapitre, représente des exemples de champs bruités et de champs reconstruits avec une base de degré 5. La FIGURE 3.23, située à la fin de ce chapitre, représente des exemples de champs bruités et de champs reconstruits avec une base de degré 25. Nous constatons alors que, comme précédemment, notre méthode lisse le signal.

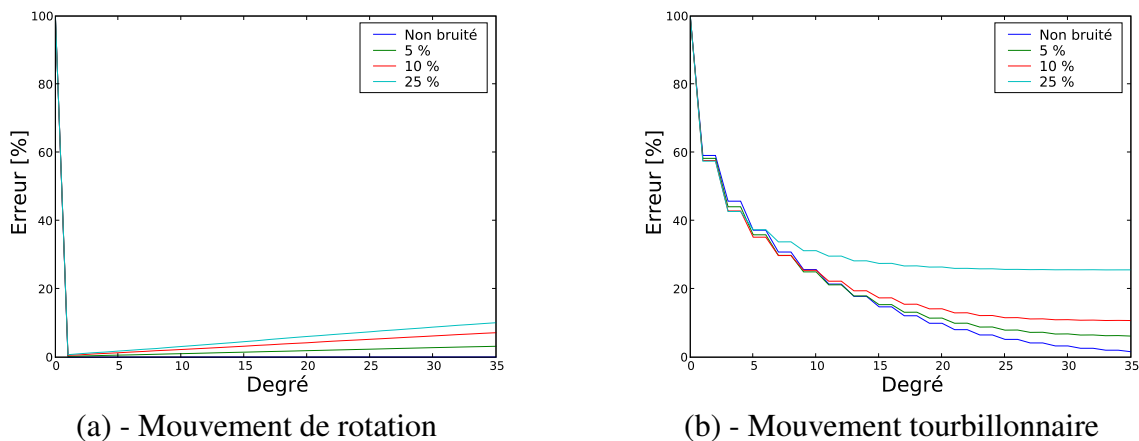


FIGURE 3.8 – Représentation de l'erreur de modélisation en fonction du degré la base pour des quantités de bruit impulsionnel variables, pour (a) - le mouvement de rotation et (b) - le mouvement tourbillonnaire.

Dans le cas du bruit impulsionnel, cela se traduit par une reconstruction des vecteurs supprimés. Cette reconstruction s'explique par la loi de conservation de l'énergie énoncée par Parseval [Parseval 99]. Nous pouvons tout de même noter une baisse de l'amplitude du signal reconstruit. En effet, comme nous utilisons un domaine  $\Omega$  complet, l'énergie est diffusée sur tout le domaine ce qui entraîne une reconstruction des vecteurs manquants mais également une sous-estimation de la valeur des coefficients de projection. Par contre, l'allure du signal reconstruit reste proche de celle du signal original.

### 3.3 Analyse des mouvements de caméra

Parmi les différents travaux destinés à étudier le contenu des séquences cinématographiques, l'étude des mouvements de caméra fait l'objet de nombreuses recherches. L'extraction de ces mouvements est un des sujets du forum TRECVID de 2005 [Smeaton 06, Smeaton 08]. L'information « bas-niveau » concernant ces mouvements est alors utilisée dans des applications variées telles que, par exemple, la rotoscopie<sup>1</sup>, la compensation de mouvement, la détection de changement de scènes ou l'indexation. Une approche traditionnelle pour étudier les mouvements de caméra consiste à les représenter par un modèle paramétrique. Le principe d'une caméra étant de projeter une scène tridimensionnelle sur un capteur bidimensionnel, le modèle

<sup>1</sup> Ajout ou suppression d'objets dans des séquences d'images.

naturel pour représenter les mouvements de la caméra est le modèle suivant, appelé *modèle projectif* :

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{a_{1,0} x_1 + a_{0,1} x_2 + a_{0,0}}{c_{1,0} x_1 + c_{0,1} x_2 + 1} \\ x'_2 = \frac{b_{1,0} x_1 + b_{0,1} x_2 + b_{0,0}}{c_{1,0} x_1 + c_{0,1} x_2 + 1} \end{cases} \quad (3.13)$$

avec  $P(x_1, x_2, x_3)^T$  un point de la scène tridimensionnelle,  $P'(x'_1, x'_2)^T$  le projeté du point  $P$  sur le plan de projection et  $\{a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}\} \in \mathbb{R}^3$  les paramètres du modèle projectif. D'après (3.13), ce modèle est rationnel. Pour simplifier cette expression, plusieurs modèles polynomiaux non-rationnels sont utilisés, chaque modèle étant un compromis entre qualité et simplicité de modélisation. Parmi ces modèles, nous pouvons citer les modèles *constants*, *affines*, *bilinéaires*, *pseudo-perspectifs* ou *biquadratiques*. Ils sont résumés TABLEAU 3.5.

TABLEAU 3.5 – Liste des principaux modèles polynomiaux de mouvements de caméra.

Constant	$\begin{cases} x'_1 = x_1 + a_{0,0} \\ x'_2 = x_2 + b_{0,0} \end{cases}$
Affine	$\begin{cases} x'_1 = a_{1,0} x_1 + a_{0,1} x_2 + a_{0,0} \\ x'_2 = b_{1,0} x_1 + b_{0,1} x_2 + b_{0,0} \end{cases}$
Bilinéaire	$\begin{cases} x'_1 = a_{1,1} x_1 x_2 + a_{1,0} x_1 + a_{0,1} x_2 + a_{0,0} \\ x'_2 = b_{1,1} x_1 x_2 + b_{1,0} x_1 + b_{0,1} x_2 + b_{0,0} \end{cases}$
Pseudo-perspectif	$\begin{cases} x'_1 = a_{2,0} x_1^2 + a_{1,1} x_1 x_2 + a_{1,0} x_1 + a_{0,1} x_2 + a_{0,0} \\ x'_2 = b_{0,2} x_2^2 + b_{1,1} x_1 x_2 + b_{1,0} x_1 + b_{0,1} x_2 + b_{0,0} \end{cases}$
Biquadratique	$\begin{cases} x'_1 = a_{2,0} x_1^2 + b_{0,2} x_2^2 + a_{1,1} x_1 x_2 + a_{1,0} x_1 + a_{0,1} x_2 + a_{0,0} \\ x'_2 = b_{2,0} x_1^2 + b_{0,2} x_2^2 + b_{1,1} x_1 x_2 + b_{1,0} x_1 + b_{0,1} x_2 + b_{0,0} \end{cases}$

Dans [Doulaverakis 04], DOULAVERAKIS *et al.* proposent une méthode d'estimation des mouvements de caméra par analyse d'histogrammes. Pour cela, ils construisent, pour chaque image, un histogramme des directions des vecteurs du champ de déplacement. L'analyse de cet histogramme permet alors de déterminer le mouvement dominant du champ. Dans [Ngo 00, Ngo 02], NGO *et al.* déterminent les mouvements de la caméra et des objets en représentant chaque séquence par une texture temporelle horizontale et une texture temporelle verticale. Chaque texture représente alors l'évolution d'un ensemble de pixels au cours du temps. Ensuite, ils calculent l'orientation de ces textures via leur tenseur de structure. Une analyse de la distribution de ces orientations au cours du temps permet alors de déterminer le mouvement dominant de la séquence. Dans [Broszio 99], BROZIO et GRAU proposent une méthode robuste d'estimation des paramètres de la caméra composée de trois étapes. Tout d'abord, ils extraient les coins des objets de la scène en utilisant la méthode proposée dans [Harris 88]. Puis



ils analysent les correspondances entre les coins de deux images successives par une méthode de corrélation. Finalement, ils estiment les paramètres de la caméra par une méthode des moindres carrés, de sorte que chaque coin d'une image trouve son correspondant dans l'image suivante. Dans [Sáez 03], SÁEZ *et al.* estiment les mouvements de la caméra par une méthode basée sur la transformée de Hough généralisée (GHT) [Hough 62, Guil 94]. Cette méthode permet d'estimer la quantité de rotation, de mise à l'échelle et de déplacement entre deux images d'une séquence. Les images utilisées ici sont générées directement à partir des coefficients DC du flux MPEG, sans calculer les champs de déplacement. Dans [Milanese 99], MILANESE *et al.* proposent de segmenter les champs en régions uniformes (*superblocks*), c'est-à-dire possédant le même mouvement. Tout d'abord, ils analysent l'amplitude de chaque vecteur pour extraire les superblocs *stationnaires*. Ils segmentent ensuite chaque superbloc *non-stationnaire* en un ensemble de blocs contenant des vecteurs représentant le même mouvement. Ils évaluent alors les paramètres de leur modèle par la méthode des moindres carrés sur ces blocs réguliers, puis ils déterminent le mouvement dominant par une binarisation de ces paramètres. Dans [Durik 01], DURIK et BENOIS-PINEAU adaptent la méthode d'estimation du mouvement présentée dans [Bouthemy 99] afin de traiter directement les champs de déplacement extraits du flux MPEG. Ces champs de déplacement sont généralement de faibles résolutions et possèdent un certain nombre de vecteurs incohérents. Pour résoudre ce problème, les auteurs proposent alors une méthode destinée à éliminer ces vecteurs incohérents ce qui permet de rendre la méthode d'estimation du mouvement robuste au bruit engendré par la compression MPEG. Nous pouvons également citer les travaux de HATI et SENGUPTA permettant de déterminer les paramètres du modèle en utilisant un algorithme génétique [Hati 01] ainsi que les méthodes présentées au chapitre 1 [Odobez 95, Park 04].

Nous avons vu au début de ce chapitre que notre méthode permet d'estimer simplement les paramètres des modèles affines. Tout d'abord, nous étudions la qualité de modélisation de ce modèle sur des séquences expérimentales. Nous expliquons ensuite comment interpréter les mouvements d'une caméra à partir des coefficients de projection en appliquant notre méthode sur trois séquences expérimentales.

### 3.3.1 Évaluation de la qualité du modèle sur des champs expérimentaux

Nous avons vu précédemment que la valeur des coefficients de projection caractérise la quantité de mouvement contenue dans un champ de déplacement. Nous allons maintenant vérifier cette propriété de façon expérimentale. Pour cela, nous générons, grâce au dispositif présenté FIGURE 3.9, un ensemble de mouvements « élémentaires » dont nous connaissons précisément la valeur des paramètres. Nous projetons alors les champs expérimentaux sur une base de degré 2 puis nous en déduisons les paramètres des modèles biquadratiques correspondants. Nous comparons alors ces paramètres avec les paramètres initiaux pour en déduire l'erreur de modélisation.

Le dispositif d'acquisition est un appareil photographique numérique Nikon D1 contrôlé par une télécommande infrarouge. L'objectif utilisé est un Nikkor 50mm à focale fixe. L'appareil photographique est disposé devant une plaque métallique sur laquelle une image texturée est fixée. Cette plaque est montée sur trois tables de déplacement permettant d'effectuer des translations selon les trois axes avec une précision de deux centièmes de millimètre ainsi qu'une table de déplacement permettant une rotation de la plaque métallique selon l'axe optique avec une précision d'un dixième de degré. Ce dispositif ainsi que la texture utilisée durant l'expérience sont représentés FIGURE 3.9.





### 3.3.2 Étude de séquences cinématographiques

Dans cette partie, nous utilisons notre méthode pour déterminer le mouvement dominant contenu dans différentes séquences cinématographiques. Les séquences étudiées, connues sous le nom de « garden », « tempete » et « coastguard », sont issues de [media.xiph.org 08]. Pour simplifier la compréhension, nous considérons ici que le mouvement apporté par des objets mobiles contenus dans chaque séquence est négligeable. Le mouvement dominant correspond donc essentiellement au mouvement de la caméra. Il faut toutefois noter la différence entre le mouvement apparent contenu dans les champs de déplacement et le mouvement réel de la caméra. Dans notre cas, nous considérons que le mouvement de la caméra est l'opposé du mouvement apparent : lorsque la caméra se déplace de la gauche vers la droite, le mouvement apparent d'un objet fixe est alors perçu comme un mouvement de la droite vers la gauche.

Nous souhaitons donc déterminer le mouvement dominant de chaque séquence, parmi les quatre mouvements suivants : un travelling horizontal, un travelling vertical, une rotation et un zoom. Nous pouvons facilement établir la relation entre ces mouvements et les mouvements de translation horizontale, de translation verticale, de rotation et de divergence étudiés précédemment. Nous définissons donc, à partir de (3.7), la quantité de vitesse associée à chaque mouvement de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Travelling horizontal} &= tr_{x_1} &= \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^1 \\
 \text{Travelling vertical} &= tr_{x_2} &= \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^2 \\
 \text{Rotation} &= \frac{rot_{x_1} - rot_{x_2}}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\tilde{v}_{0,1}^1 + \tilde{v}_{1,0}^2) \\
 \text{Zoom} &= \frac{div_{x_1} + div_{x_2}}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{4} (\tilde{v}_{1,0}^1 + \tilde{v}_{0,1}^2)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dans cette expérience, les champs de déplacement sont directement extraits du flux MPEG. Pour les trois séquences étudiées, ce flux MPEG est composé d'une image tous les sept champs de déplacement. Le champ de déplacement manquant est alors reconstruit en calculant la moyenne entre le champ précédent et le champ suivant. Nous étudions ici les champs de déplacement extraits du flux MPEG dans le but d'obtenir un traitement simple et rapide. Pour obtenir des résultats plus précis ou plus robustes, il est possible d'utiliser d'autres méthodes d'estimation du mouvement, comme celles présentées dans le chapitre 1.

### 3.3.3 Étude de la séquence « garden »

La première séquence étudiée, connue sous le nom de « garden », représente un travelling horizontal effectué dans un jardin. Dans la première partie de la séquence, on peut voir, au premier plan, le tronc d'un arbre se déplaçant de la droite vers la gauche. Dans la deuxième partie de la séquence, la quasi-totalité de l'arbre est sortie du champ de la caméra. On ne voit alors qu'un parterre de fleurs au second plan et un ensemble de maisons en arrière-plan. Cette séquence est composée de 115 images de taille  $352 \times 240$  pixels. Les champs de déplacement extraits du flux MPEG ont une résolution de  $22 \times 15$  vecteurs. Trois images extraites de cette séquence ainsi que les trois champs de déplacement associés sont présentés FIGURE 3.10.

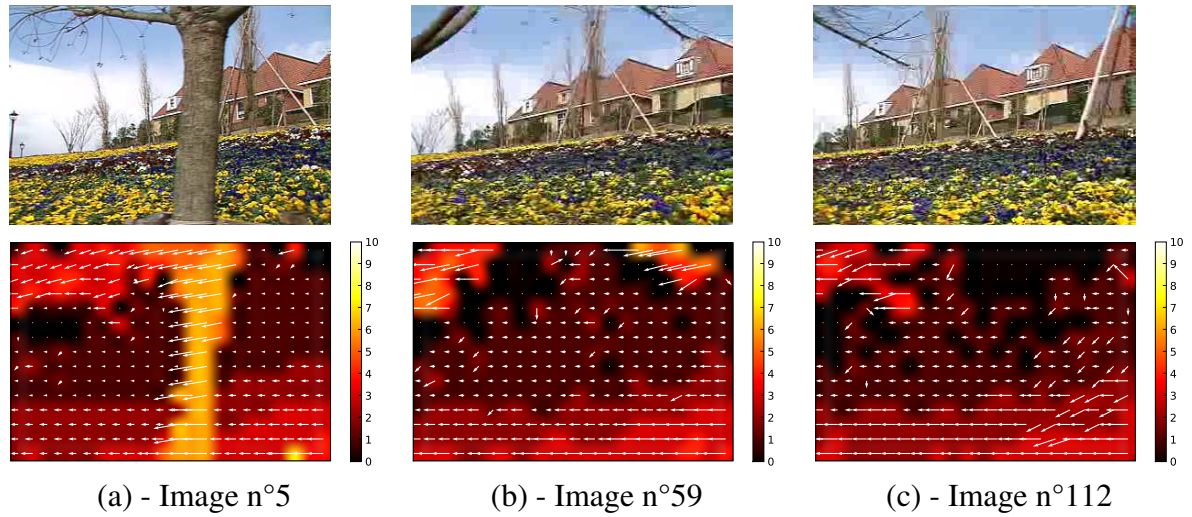


FIGURE 3.10 – Séquence « garden » : images extraites de la séquence (en haut) et champs de déplacement associés (en bas). Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et la norme des vecteurs a été multipliée par 8. Les mesures données sont exprimées en pixel.

Nous projetons alors l'ensemble des champs de déplacement sur la base de degré 1 présentée en (3.2). À partir des six coefficients de projection obtenus, nous en déduisons, grâce aux relations (3.14), les quantités de vitesse des quatre mouvements de caméra contenues dans chaque image. L'évolution temporelle de ces quatre quantités est présentée FIGURE 3.11. Nous calculons également l'énergie temporelle associée à chaque mouvement de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 E_{tr_h} &= \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^1 \right)^2 & E_{tr_v} &= \sum_{t=1}^T \left( \frac{1}{2} \tilde{v}_{0,0}^2 \right)^2 \\
 E_{rot} &= \sum_{t=1}^T \left( \frac{\sqrt{3}}{4} (\tilde{v}_{0,1}^1 + \tilde{v}_{1,0}^2) \right)^2 & E_{zoom} &= \sum_{t=1}^T \left( \frac{\sqrt{3}}{4} (\tilde{v}_{1,0}^1 + \tilde{v}_{0,1}^2) \right)^2
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

avec  $T$  le nombre de champs de déplacement de la séquence. L'énergie portée par chaque mouvement est donnée TABLEAU 3.7.

Nous constatons alors que près de 92 % de l'énergie est contenue dans le mouvement de travelling horizontal. De plus, comme le montre la FIGURE 3.11, la quantité de vitesse associée

TABLEAU 3.7 – Séquence « garden » : énergie totale, énergie relative exprimée en pourcent, moyenne et écart-type des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom.

	Énergie totale	Énergie totale [%]	Quantité de vitesse moyenne	Écart-type
Travelling horizontal	295.65	91.95 %	-1.58	0.30
Travelling vertical	4.88	01.52 %	-0.17	0.11
Rotation	13.59	04.23 %	0.31	0.14
Zoom	7.42	02.31 %	0.00	0.25

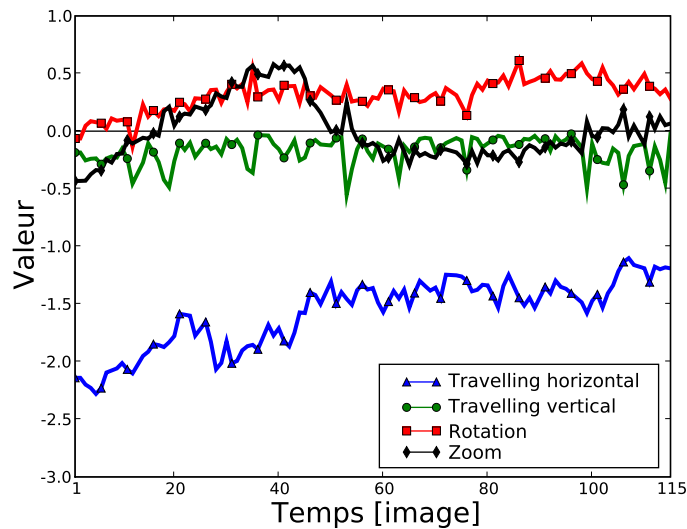


FIGURE 3.11 – Séquence « garden » : évolution temporelle des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom.

à ce mouvement est tout le temps négative ce qui, selon notre référentiel, traduit un mouvement apparent de la droite vers la gauche. Nous en déduisons donc que le mouvement de caméra de cette séquence est un mouvement de travelling horizontal de la gauche vers la droite, ce qui se vérifie en regardant la séquence.

### 3.3.4 Étude de la séquence « tempete »

La seconde séquence étudiée, connue sous le nom de « tempete », représente un mouvement de zoom arrière effectué sur un pot de fleurs. Des feuilles mortes tombent devant la caméra. Cette séquence est composée de 260 images de taille  $352 \times 288$  pixels. Les champs de déplacement extraits du flux MPEG ont une résolution de  $22 \times 18$  vecteurs. Trois images extraites de cette séquence ainsi que les trois champs de déplacement associés sont présentés FIGURE 3.12. Nous constatons alors que le déplacement des feuilles engendre localement un mouvement orienté vers le bas pouvant être, dans notre cas, considéré comme du bruit.

Comme précédemment, nous projetons la séquence sur une base de degré 1. À partir des six coefficients de projection obtenus, nous en déduisons, grâce aux relations (3.14), les quantités de vitesse des quatre mouvements de caméra contenues dans chaque image. L'évolution temporelle de ces quatre quantités est présentée FIGURE 3.13. L'énergie portée par chaque mouvement est donnée TABLEAU 3.8.

Nous constatons que plus de 64 % de l'énergie totale de la séquence est portée par le mouvement de zoom : de nouveau, le mouvement dominant est correctement détecté. De plus, comme le montre la FIGURE 3.13, la quantité de vitesse associée à ce mouvement est tout le temps négative ce qui, selon notre référentiel, correspond à un mouvement apparent de zoom avant et donc à un mouvement de caméra de zoom arrière. Nous pouvons cependant noter la quantité d'énergie non négligeable associée au mouvement de travelling horizontal. En étudiant la FIGURE 3.13, nous constatons qu'une grande partie de cette énergie est contenue entre les images 100 et 200 de la séquence. En regardant la vidéo, nous constatons que cette énergie est générée par deux déplacements vers la gauche de la caméra.

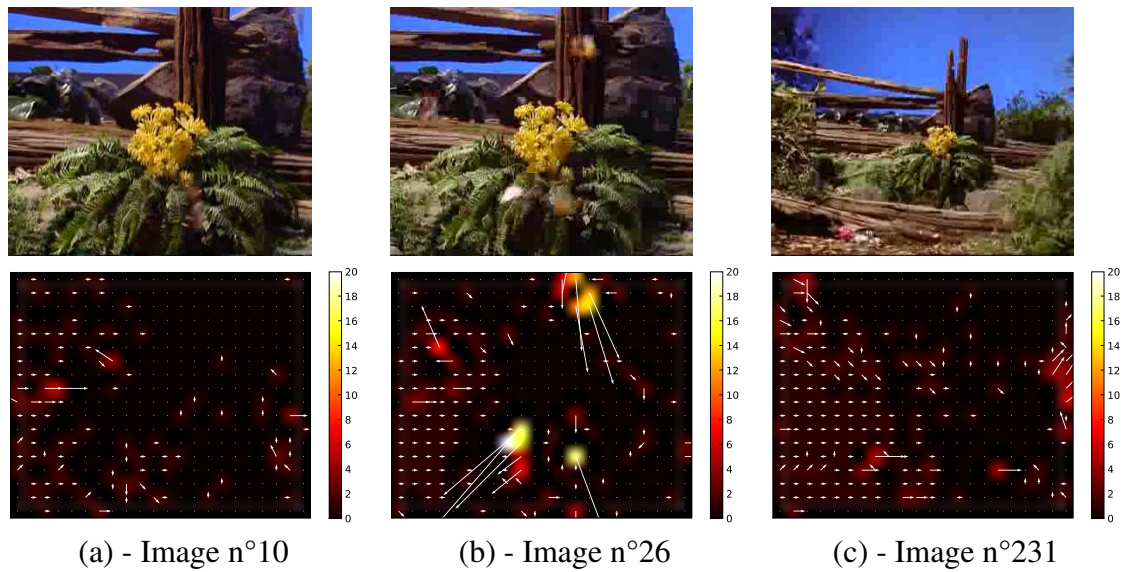


FIGURE 3.12 – Séquence « tempete » : images extraites de la séquence (en haut) et champs de déplacement associés (en bas). Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et la norme des vecteurs a été multipliée par 8. Les mesures données sont exprimées en pixel.

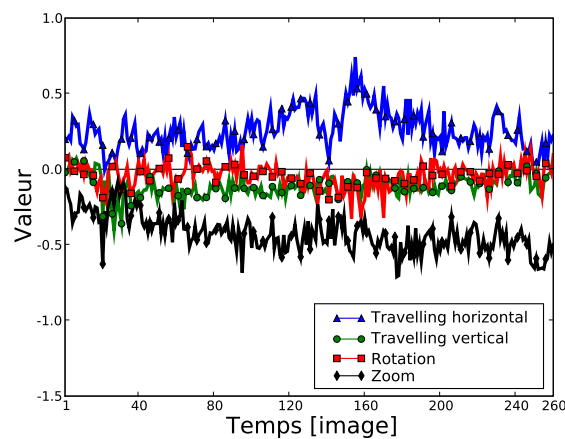


FIGURE 3.13 – Séquence « tempete » : évolution temporelle des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom.

TABEAU 3.8 – Séquence « tempete » : énergie totale, énergie relative exprimée en pourcent, moyenne et écart-type des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom.

	Énergie totale	Énergie totale [%]	Quantité de vitesse moyenne	Écart-type
Travelling horizontal	21.15	27.19 %	0.26	0.12
Travelling vertical	4.51	5.80 %	-0.11	0.07
Rotation	1.96	2.52 %	-0.04	0.08
Zoom	50.18	64.50 %	-0.42	0.12



### 3.3.5 Étude de la séquence « coastguard »

La troisième séquence étudiée, connue sous le nom de « coastguard », représente le déplacement de deux bateaux sur un canal. Cette séquence est composée de trois mouvements de travelling : un mouvement lent de la droite vers la gauche puis un mouvement rapide de bas en haut et finalement un mouvement lent de gauche à droite. Cette séquence est composée de 300 images de taille  $352 \times 288$  pixels. Les champs de déplacement extraits du flux MPEG ont une résolution de  $22 \times 18$  vecteurs. Trois images extraites de cette séquence ainsi que les trois champs de déplacement associés sont présentés FIGURE 3.14.

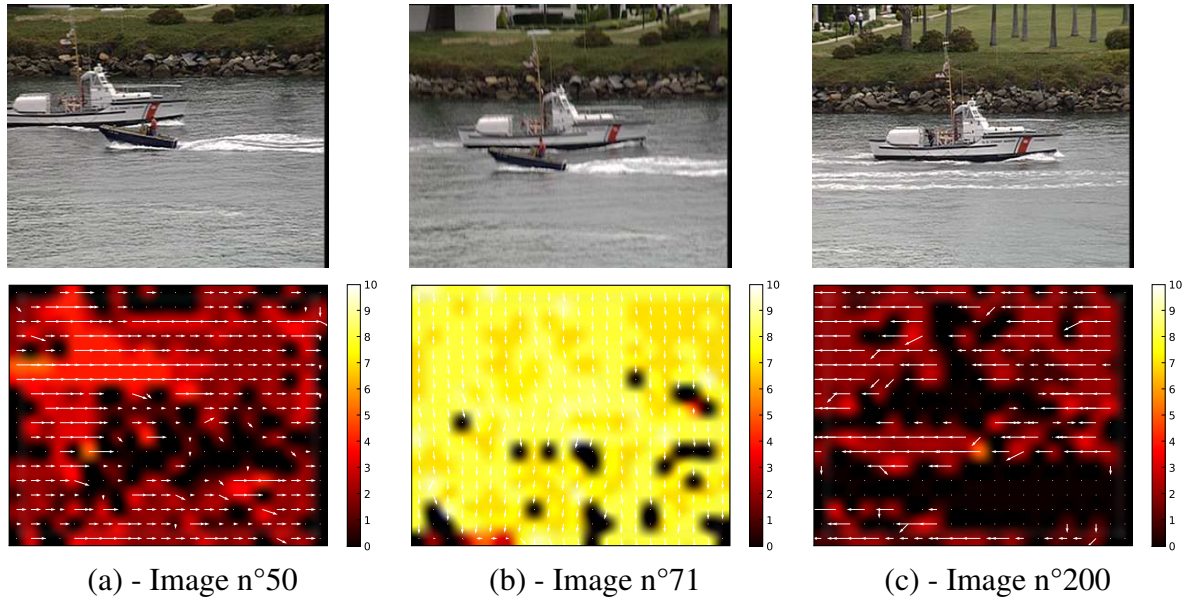


FIGURE 3.14 – Séquence « coastguard » : images extraites de la séquence (en haut) et champs de déplacement associés (en bas). Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et la norme des vecteurs a été multipliée par 8. Les mesures données sont exprimées en pixel.

Comme pour les deux séquences précédentes, nous projetons cette séquence sur une base de degré 1. À partir des six coefficients de projection obtenus, nous en déduisons, grâce aux relations (3.14), les quantités de vitesse des quatre mouvements de caméra contenues dans chaque image. L'évolution temporelle de ces quatre quantités est présentée FIGURE 3.15. L'énergie portée par chaque mouvement est donnée TABLEAU 3.9.

Nous constatons alors que les deux mouvements les plus énergétiques sont le travelling horizontal et le travelling vertical. En étudiant la figure 3.15, nous retrouvons ces trois mouvements qui composent la séquence. En effet, durant les 60 premières images, le mouvement dominant est un travelling horizontal. La quantité de vitesse associée à ce mouvement est positive, ce qui traduit, selon notre référentiel, un mouvement apparent de la gauche vers la droite. Durant cette première partie, le mouvement de la caméra est donc un travelling horizontal orienté de la droite vers la gauche. Le même raisonnement peut être appliqué pour la troisième partie de la séquence, c'est-à-dire de l'image 80 à l'image 300. Nous en déduisons alors que le mouvement de la caméra, pour cette partie, est un travelling horizontal de la gauche vers la droite. Entre ces deux parties, c'est-à-dire de l'image 60 à l'image 80, nous constatons que le mouvement dominant est un travelling vertical. La quantité de vitesse négative traduit un mouvement de caméra de bas en haut. De plus, la forte amplitude de cette quantité de vitesse indique un mouvement rapide par rapport aux deux autres mouvements. En dérivant ces quantités de vitesse,

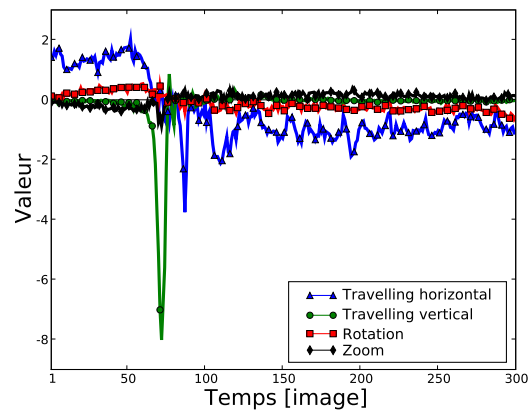


FIGURE 3.15 – Séquence « coastguard » : évolution temporelle des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom.

TABLEAU 3.9 – Séquence « coastguard » : énergie totale, énergie relative exprimée en pourcent, moyenne et écart-type des quantités de vitesse associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom.

	Énergie totale	Énergie totale [%]	Quantité de vitesse moyenne	Écart-type
Travelling horizontal	378.15	56.94 %	-0.43	1.04
Travelling vertical	248.68	37.45 %	-0.18	0.89
Rotation	26.04	3.92 %	-0.12	0.27
Zoom	11.20	1.69 %	0.04	0.19

nous pouvons déterminer les quantités d'accélération de chaque mouvement. Elles sont représentées FIGURE 3.16. La présence d'un pic sur une quantité d'accélération d'un mouvement traduit alors une forte variation de la quantité de vitesse de ce mouvement. À partir de cette FIGURE 3.16, nous pouvons facilement détecter les changements de mouvement de la caméra.

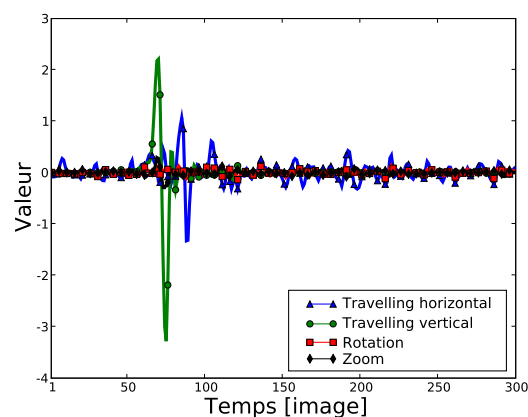


FIGURE 3.16 – Séquence « coastguard » : évolution temporelle des quantités d'accélération associées aux mouvements de travelling horizontal, de travelling vertical, de rotation et de zoom.

### 3.3.6 Temps de calcul

Nous présentons maintenant les temps de calcul associés aux trois séquences. L'ordinateur utilisé est un portable ASUS F5VL avec un processeur Intel Core 2 duo T5450 cadencé à 1.66 GHz et 2 Go de mémoire vive. Les traitements sont effectués sur un seul cœur de calcul.

La base orthonormale de degré 1 composée des polynômes de Legendre est générée en 12 ms. La génération des valeurs précalculées nécessite 16 ms pour un champ de taille  $22 \times 15$  et 18 ms pour un champ de taille  $22 \times 18$ . Nous rappelons ici que ces calculs ne sont à effectuer qu'une seule fois. Le TABLEAU 3.10 présente les temps de calcul de chaque séquence. Il fournit également les temps de calcul d'un seul champ ainsi que le nombre de champs pouvant être traité par seconde. Les temps donnés ici concernent les deux méthodes de calcul présentées au chapitre précédent, c'est-à-dire le calcul par la méthode directe et le calcul par la méthode optimisée.

TABLEAU 3.10 – *Temps de calcul nécessaires au traitement des séquences « garden », « tempête » et « coastguard » en utilisant la méthode directe et la méthode optimisée.*

		Séquence « garden »	Séquence « tempête »	Séquence « coastguard »
Nombre de champs		115	260	300
Résolution		$22 \times 15$	$22 \times 18$	$22 \times 18$
Méthode directe	Temps total	190 ms	440 ms	500 ms
	Temps par champ	1.65 ms	1.69 ms	1.67 ms
	Champs traités par seconde	605 champs	591 champs	600 champs
Méthode optimisée	Temps total	30 ms	55 ms	60 ms
	Temps par champ	0.26 ms	0.21 ms	0.20 ms
	Champs traités par seconde	3833 champs	4727 champs	5000 champs

Nous constatons alors que les temps de calcul sont faibles, notamment en utilisant la méthode optimisée. Pour ce type de séquence, cette méthode permet de projeter plusieurs milliers de champs par seconde. Dans le but de réaliser, par exemple, des applications interactives, le traitement de séquences en temps-réel semble envisageable.

## 3.4 Interprétation du comportement d'un utilisateur devant une webcam

Le projet SERIBEL<sup>2</sup> a pour but d'étudier le comportement d'un utilisateur effectuant des recherches bibliographiques sur ordinateur. Actuellement, l'annotation des différents mouvements effectués par cet utilisateur se fait de façon manuelle par des psychologues. Le projet est donc destiné à automatiser l'analyse de ces mouvements. Les séquences traitées dans ce mémoire représentent une personne effectuant des mouvements de tête vers la gauche, vers la

<sup>2</sup>*Stratégies Expertes de Recherche d'Informations Bibliographiques En Ligne*. Projet en collaboration avec le Laboratoire de Neurobiologie des Réseaux Sensorimoteurs - Université Paris 5 et le Laboratoire Langage et Cognition (LACO) - Université de Poitiers.



droite et vers le bas de façon aléatoire, c'est-à-dire sans ordre prédéfini. Durant toute la séquence, la webcam reste immobile et il n'y pas de mouvement en arrière-plan. La séquence est composée de 1048 images de taille de  $320 \times 240$  pixels. Les champs de déplacement sont extraits par une méthode de flot optique basée sur l'étude du tenseur de structure [Augereau 05]. La FIGURE 3.17 montre trois extraits de cette séquence ainsi que les champs de déplacement associés.

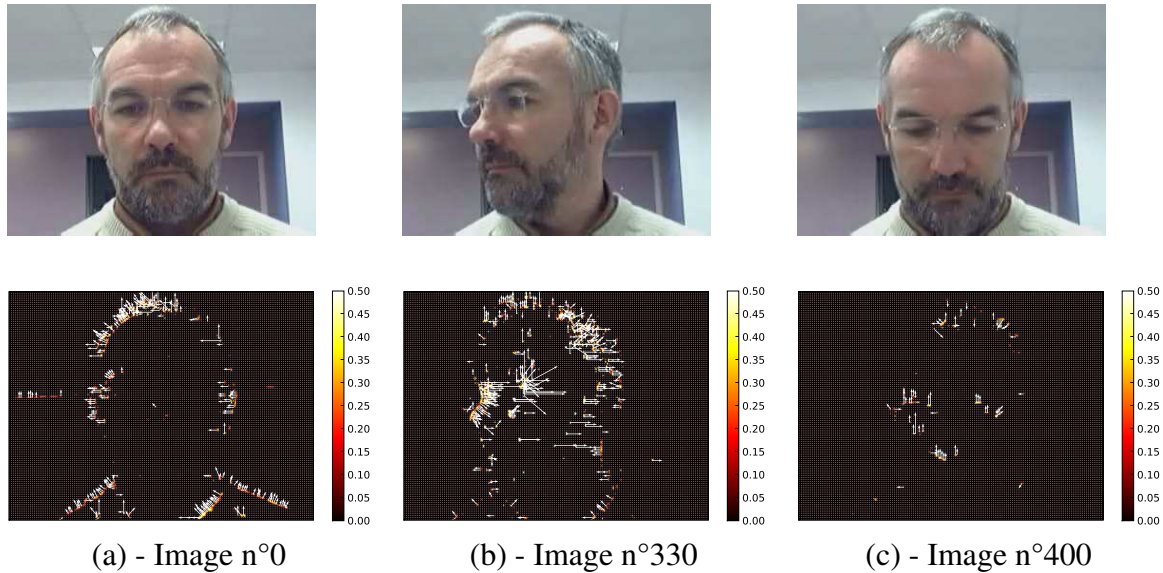


FIGURE 3.17 – Séquence « webcam » : images extraites de la séquence (en haut) et champs de déplacement associés (en bas). Pour des raisons de lisibilité, seule la carte de norme est affichée. Les mesures données sont exprimées en pixel.

Nous projetons cette séquence sur une base de degré 1. Pour chaque champ de déplacement, nous obtenons donc six coefficients de projection. Le TABLEAU 3.11 fournit l'énergie temporelle portée par chaque coefficient. Nous constatons alors que les coefficients  $\tilde{v}_{1,0}^1$ ,  $\tilde{v}_{1,0}^2$ ,

TABLEAU 3.11 – Séquence « webcam » : énergie totale, énergie relative exprimée en pourcent, moyenne et écart-type des six coefficients issus d'une projection sur une base de degré 1.

Coefficients	Énergie totale	Énergie totale [%]	Quantité de vitesse moyenne	Écart-type
$\tilde{v}_{0,0}^1$	18.96	88.78 %	0.02	0.04
$\tilde{v}_{0,0}^2$	1.64	7.66 %	0.00	0.01
$\tilde{v}_{1,0}^1$	0.23	1.06 %	0.00	0.00
$\tilde{v}_{1,0}^2$	0.07	0.35 %	0.00	0.00
$\tilde{v}_{0,1}^1$	0.38	1.79 %	0.00	0.00
$\tilde{v}_{0,1}^2$	0.08	0.37 %	0.00	0.00

$\tilde{v}_{0,1}^1$  et  $\tilde{v}_{0,1}^2$  ne portent presque pas d'information. En effet, nous avons vu précédemment que ces coefficients permettent de modéliser des mouvements de rotation ou de zoom. Or l'utilisateur n'effectue que des mouvements de tête vers la gauche, vers la droite ou vers le bas. Ces mouvements rectilignes sont donc intégralement modélisés par les coefficients  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,0}^2$ . L'énergie

portée par les quatre autres coefficients correspond alors à du bruit. Nous limitons donc notre étude aux coefficients  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,0}^2$ . Nous pouvons alors facilement donner une interprétation physique à ces deux coefficients : le coefficient  $\tilde{v}_{0,0}^1$  modélise les mouvements de tête horizontaux et le coefficient  $\tilde{v}_{0,0}^2$  modélise les mouvements de tête verticaux. Selon notre référentiel, une valeur positive du coefficient  $\tilde{v}_{0,0}^1$  représente un déplacement vers la droite, c'est-à-dire un mouvement de tête vers la gauche et une valeur négative de ce coefficient représente un déplacement vers la gauche, c'est-à-dire un mouvement de tête vers la droite. De la même façon, une valeur positive du coefficient  $\tilde{v}_{0,0}^2$  représente un déplacement vers le haut, c'est-à-dire un mouvement de tête vers le haut et une valeur négative de ce coefficient représente un déplacement vers le bas, c'est-à-dire un mouvement de tête vers le bas. En étudiant l'évolution temporelle de ces deux coefficients, représentée FIGURE 3.18, nous pouvons alors facilement interpréter les mouvements de l'utilisateur. De plus, l'amplitude de chaque courbe nous renseigne sur la vitesse

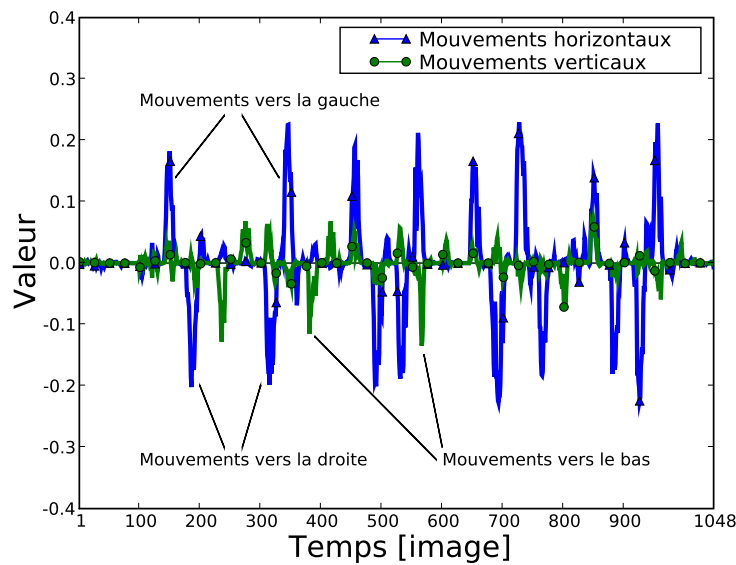


FIGURE 3.18 – Séquence « webcam » : évolution temporelle des deux coefficients de projection  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,0}^2$ . Chaque pic traduit un mouvement de tête.

des différents mouvements. Nous constatons alors que la quantité de mouvement associée aux mouvements verticaux a une amplitude moins grande que celle associée aux mouvements horizontaux. Cela vient du fait que les mouvements de tête verticaux sont de plus faibles amplitudes que les mouvements de tête horizontaux. L'amplitude et le nombre de mouvements horizontaux étant plus importants que l'amplitude et le nombre de mouvements verticaux, cela explique la différence d'énergie importante entre les deux coefficients  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,0}^2$ .

De plus, à l'instant initial, l'utilisateur est face à la webcam, comme nous pouvons le voir sur la FIGURE 3.17-(a). À partir de cette position initiale, nous pouvons alors déterminer la position de la tête à un instant donné en intégrant ces quantités de vitesse. L'évolution de la position de la tête dans le temps est donnée FIGURE 3.19. Nous pouvons toutefois noter qu'à la fin de la séquence, les deux coefficients  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,0}^2$  ne sont pas nuls bien que l'utilisateur soit revenu dans la position initiale. Cela vient principalement des 3.56 % de bruit portés par les coefficients  $\tilde{v}_{1,0}^1$ ,  $\tilde{v}_{1,0}^2$ ,  $\tilde{v}_{0,1}^1$  et  $\tilde{v}_{0,1}^2$ .

Finalement, le temps de calcul nécessaire au traitement des 1048 champs de déplacement de la séquence avec la méthode optimisée est de 49 secondes, ce qui correspond au traitement de plus de 21 champs par seconde.

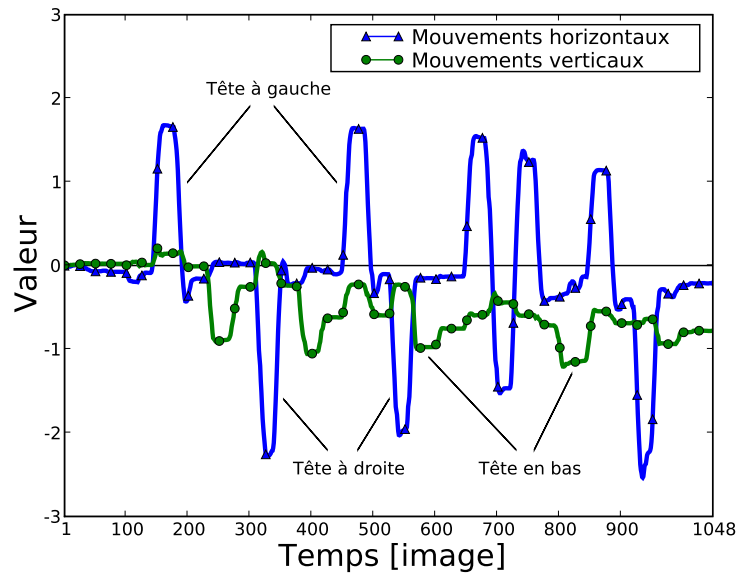


FIGURE 3.19 – Séquence « webcam » : évolution de la position de la tête de l'utilisateur en fonction du temps. Chaque pic traduit une position de tête différente de la position initiale.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement des coefficients de projection de notre modèle sur des séquences synthétiques et expérimentales. Dans un premier temps, nous avons montré la relation entre les coefficients de projection de notre modèle et les paramètres d'un modèle affine. Nous avons également constaté que la valeur de ces coefficients est proportionnelle à la quantité de mouvement contenue dans le champ de déplacement.

Nous avons ensuite évalué la résistance aux bruits gaussiens et impulsionnels de notre modèle. Nous avons alors constaté que notre méthode permet, en fonction du degré utilisé, de lisser les champs de déplacement. De ce fait, nous sommes capables de reconstruire des champs de déplacement avec une bonne qualité même si la quantité de bruit est importante.

Nous avons également extrait certaines informations sémantiques de différentes séquences cinématographiques, telles que les mouvements de caméra ou les mouvements de tête d'une personne, grâce à une étude temporelle des coefficients de projection. Dans le but d'effectuer une analyse sémantique plus complexe, ces coefficients de projection peuvent alors être intégrés dans des algorithmes déjà existants de classification ou d'indexation.

Finalement, la simplicité de notre méthode, le traitement séquentiel des champs de déplacement ainsi que les faibles temps de calcul permettent d'envisager son utilisation dans des applications interactives ou temps-réel.

Durant ce chapitre, nous avons interprété des mouvements simples tels que des translations ou des rotations en utilisant des bases de degrés faibles. Dans le prochain chapitre, nous essayons de modéliser des écoulements fluides complexes en utilisant des bases de degrés plus élevés.

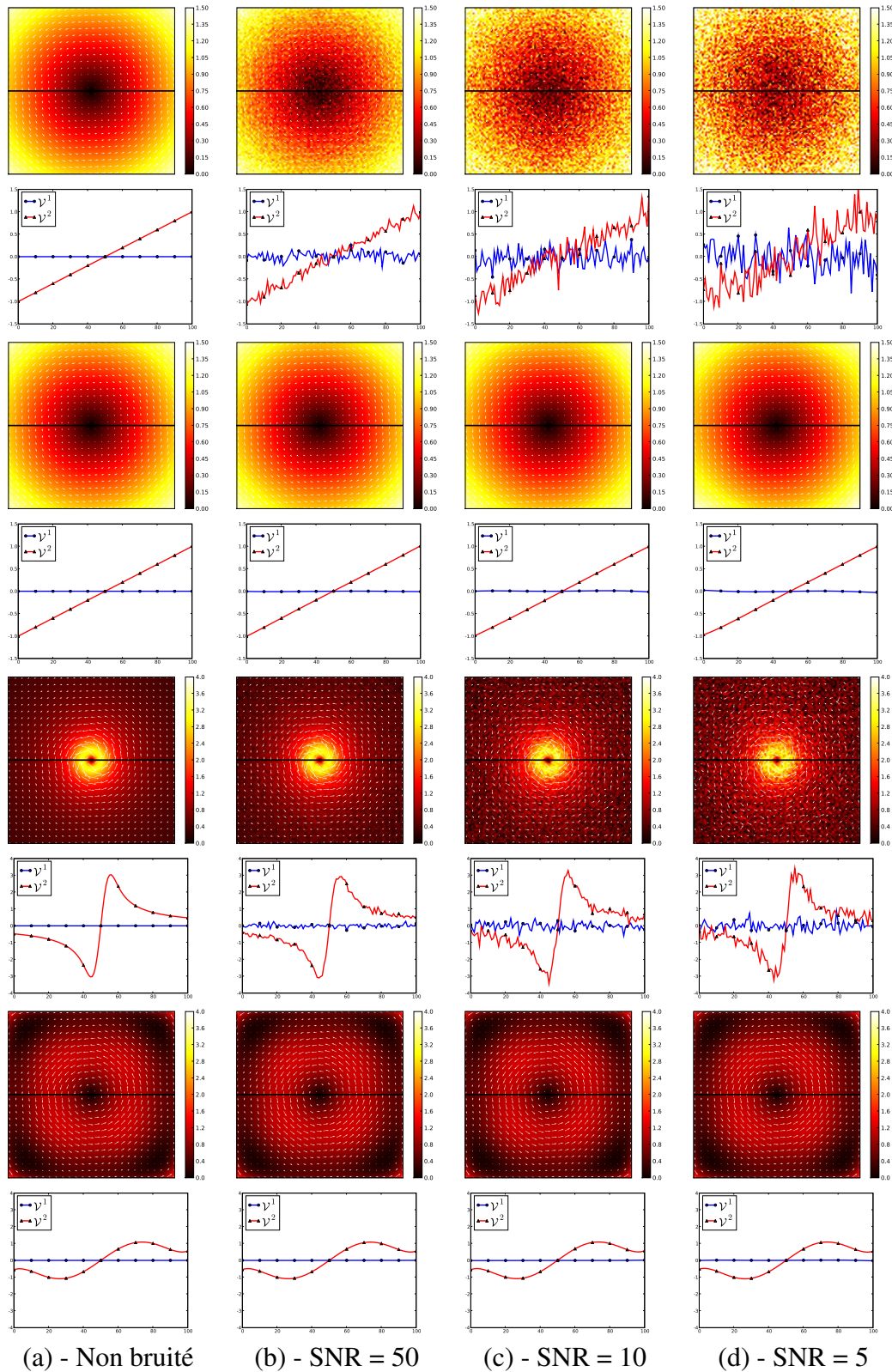


FIGURE 3.20 – Influence du bruit gaussien. De haut en bas : séquence « rotation » bruitée, séquence « rotation » reconstruite, séquence « tourbillon » bruitée et séquence « tourbillon » reconstruite. Les champs de déplacement sont modélisés par une base de degré 5. Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et seul un vecteur sur quatre est représenté. Les mesures données sont exprimées en pixel. Les profils des vitesses horizontales et verticales sont donnés pour la droite d'équation  $y = 0$ .



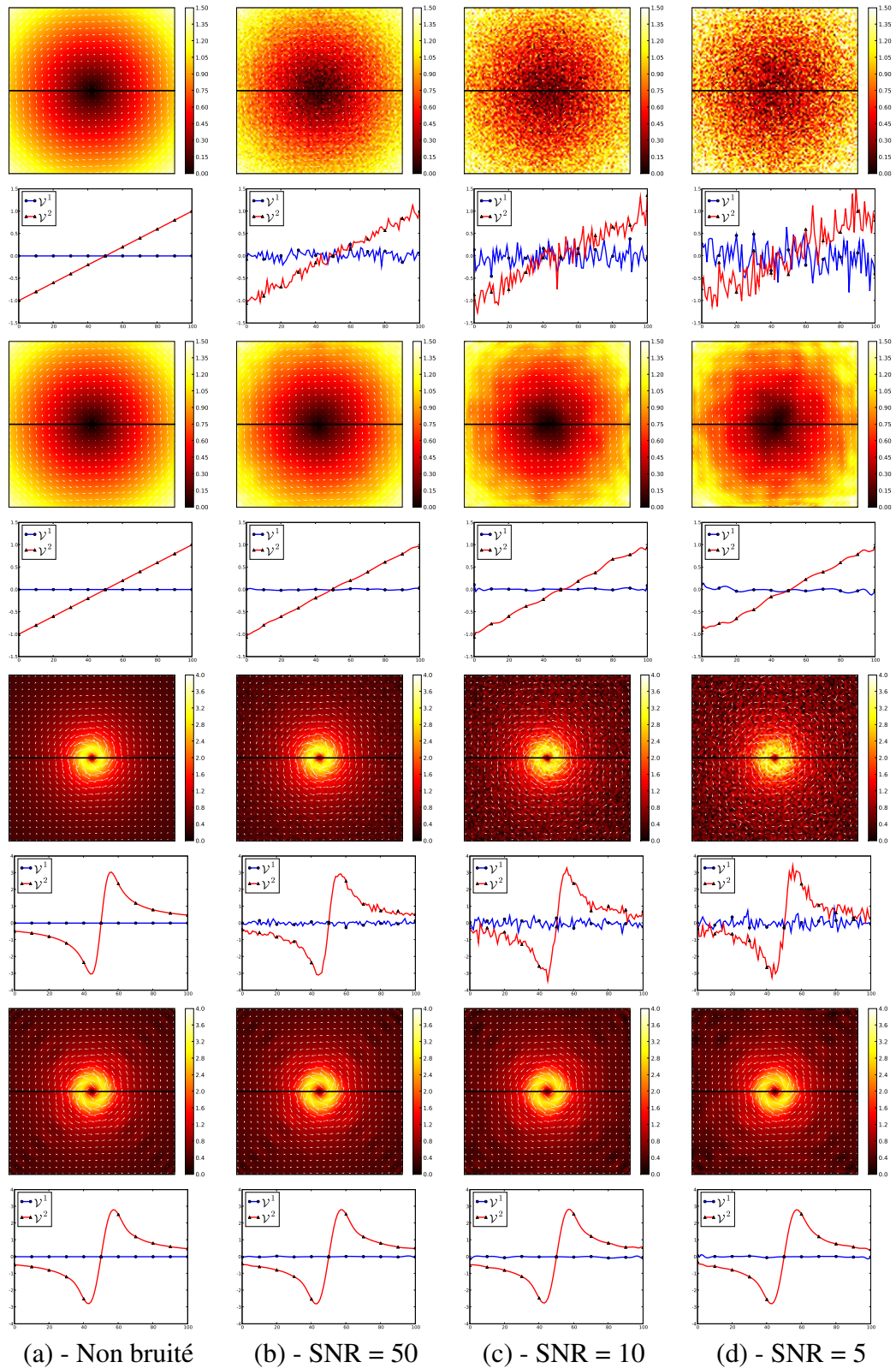


FIGURE 3.21 – Influence du bruit gaussien. De haut en bas : séquence « rotation » bruitée, séquence « rotation » reconstruite, séquence « tourbillon » bruitée et séquence « tourbillon » reconstruite. Les champs de déplacement sont modélisés par une base de degré 25. Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et seul un vecteur sur quatre est représenté. Les mesures données sont exprimées en pixel. Les profils des vitesses horizontales et verticales sont donnés pour la droite d'équation  $y = 0$ .

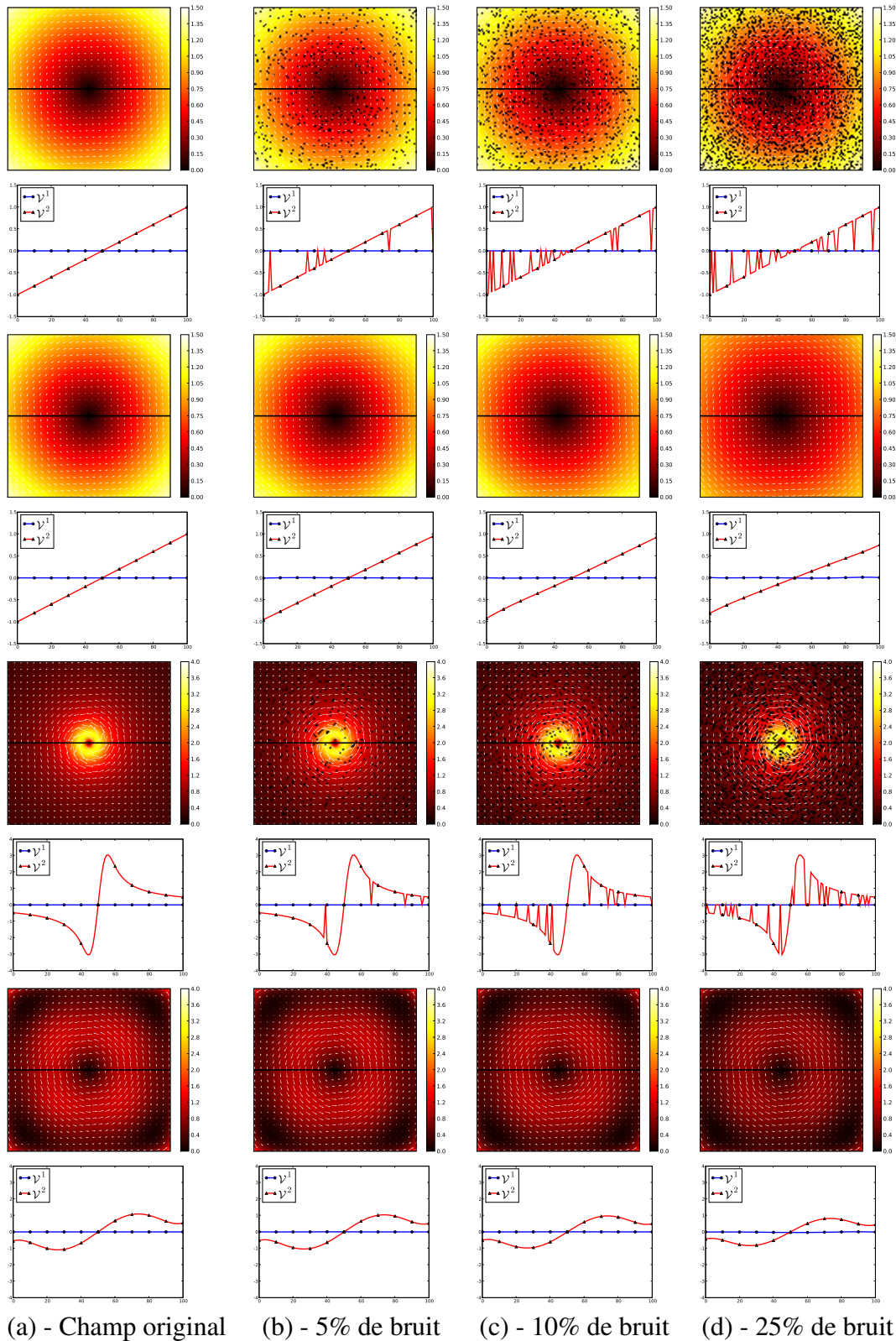


FIGURE 3.22 – Influence du bruit impulsionnel. De haut en bas : séquence « rotation » bruitée, séquence « rotation » reconstruite, séquence « tourbillon » bruitée et séquence « tourbillon » reconstruite. Les champs de déplacement sont modélisés par une base de degré 5. Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et seul un vecteur sur quatre est représenté. Les mesures données sont exprimées en pixel. Les profils des vitesses horizontales et verticales sont donnés pour la droite d'équation  $y = 0$ .

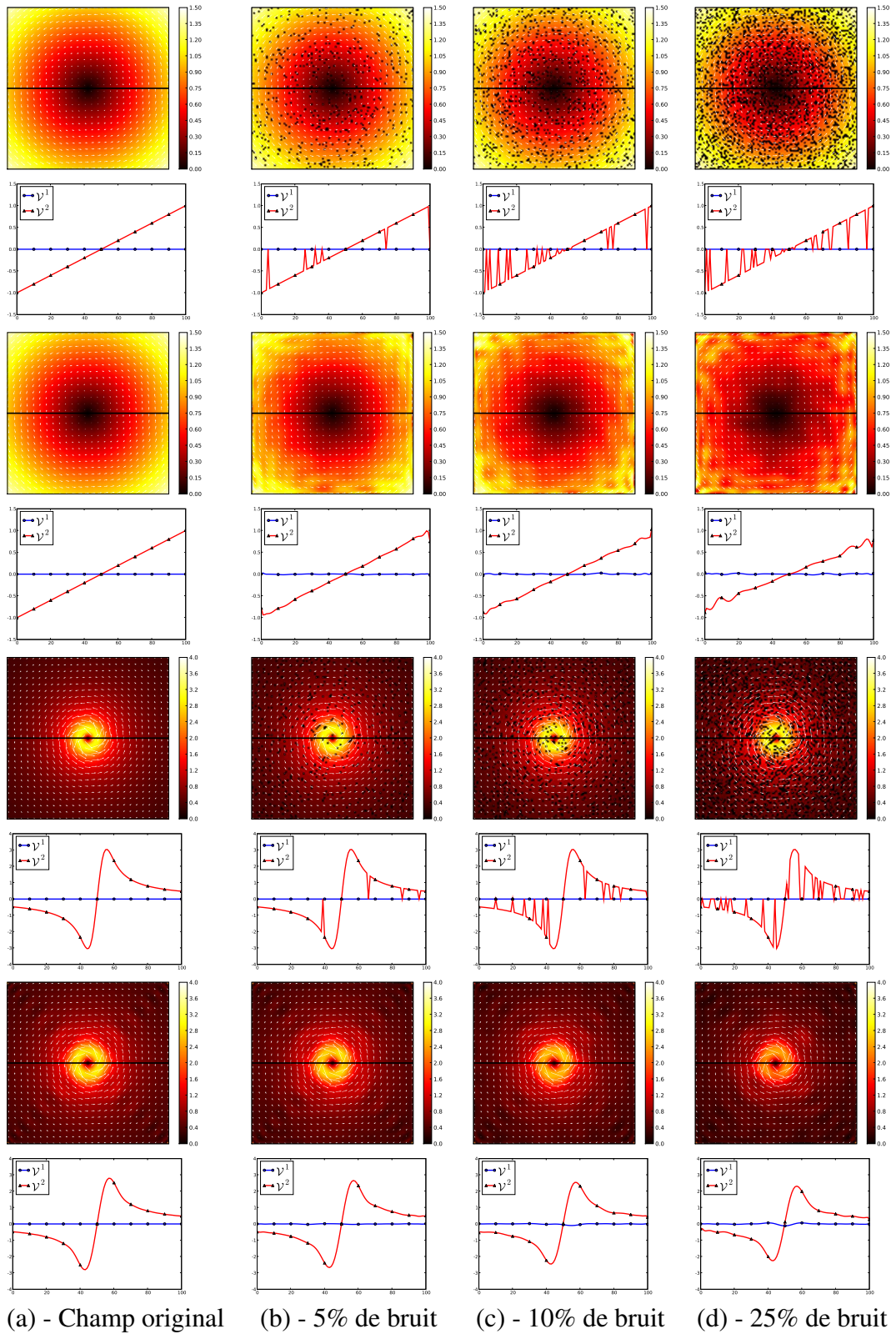


FIGURE 3.23 – Influence du bruit impulsionnel. De haut en bas : séquence « rotation » bruitée, séquence « rotation » reconstruite, séquence « tourbillon » bruitée et séquence « tourbillon » reconstruite. Les champs de déplacement sont modélisés par une base de degré 25. Pour des raisons de lisibilité, une carte de norme a été ajoutée et seul un vecteur sur quatre est représenté. Les mesures données sont exprimées en pixel. Les profils des vitesses horizontales et verticales sont donnés pour la droite d'équation  $y = 0$ .





---

# CHAPITRE 4

---

## APPLICATION À LA MÉCANIQUE DES FLUIDES

---

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement de notre méthode sur des séquences expérimentales représentant des écoulements fluides complexes issues de travaux réalisés au Laboratoire d'Étude Aérodynamique (LEA) de Poitiers. Parmi les trois séquences étudiées, la première représente un écoulement stationnaire au sein d'une cavité rigide, la seconde représente un écoulement périodique de type « cycle limite » derrière un demi-cylindre et la troisième représente un écoulement instationnaire derrière un cylindre-carré. Pour chaque séquence, nous étudions le comportement des coefficients de projection de notre modèle. Nous analysons également la qualité de modélisation de notre méthode et nous comparons les résultats obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres. Finalement, nous étudions les temps de calcul et l'occupation mémoire de notre méthode et nous analysons la capacité des deux modèles à compresser les données.

### 4.1 Étude d'un écoulement au sein d'une cavité rigide

La première séquence étudiée représente un *écoulement de Couette*<sup>1</sup> dans un canal rainuré. Elle est issue des travaux présentés dans [Billy 05]. Le dispositif expérimental permettant d'obtenir cet écoulement est constitué d'une roue en mouvement et d'une partie fixe composée de rainures perpendiculaires au sens de l'écoulement. La roue a un diamètre de 800 mm pour un poids de 52 kg. La partie fixe a une envergure de 100 mm et possède sept rainures ayant chacune une longueur  $L$  de 31,75 mm et une profondeur  $P$  de 20 mm. La taille de l'entrefer  $H$  est de 1 mm. Le fluide utilisé est de l'eau et la vitesse  $V$  dans l'entrefer est de 1 m/s. Le nombre de Reynolds  $Re$  est calculé de la façon suivante :

$$Re = \frac{V H}{\nu} = 1000 \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>Écoulement d'un fluide visqueux entre deux surfaces dont l'une est en mouvement par rapport à l'autre. Du nom du physicien français du XIX<sup>e</sup> siècle Maurice Couette.

avec  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide, c'est-à-dire  $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  pour l'eau. Une représentation schématique du dispositif expérimental est donnée FIGURE 4.1-(a). Les dimensions utilisées ici sont basées sur les travaux présentés dans [Childs 99]. Une description plus complète du montage expérimental est donnée dans [Billy 04].

Nous étudions ici l'écoulement au sein d'une seule cavité située entre deux entrefers et représentée FIGURE 4.1-(b). Dans cette cavité, plusieurs structures sont identifiables [Koseff 84, Deshpande 94] parmi lesquelles :

- un tourbillon principal, appelé *tourbillon primaire* (*Primary Eddy*). Avec un nombre de Reynolds de 1000, ce tourbillon occupe la quasi-totalité de la cavité. Son centre est proche du centre de la cavité ;
- une zone à fortes vitesses, située le long de la roue. Le mouvement dominant dans cette zone est une translation rectiligne uniforme ;
- deux tourbillons secondaires, situés dans les coins opposés aux entrefers, plus petits que le tourbillon principal et tournant dans le sens contraire, appelés *tourbillon secondaire amont* (*Upstream Secondary Eddy*) et *tourbillon secondaire aval* (*Downstream Secondary Eddy*) ;
- une zone de décollement située en amont de la cavité.

La topologie de cet écoulement au sein d'une seule cavité est représentée FIGURE 4.2. Pour un nombre de Reynolds de 1000, l'écoulement est dans un régime stationnaire. Sa topologie n'évolue donc pas au cours du temps.

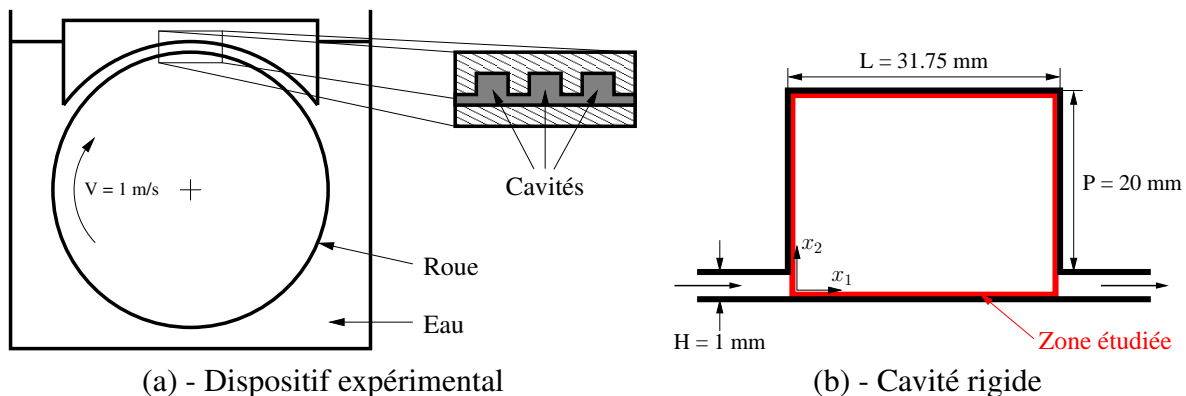


FIGURE 4.1 – Séquence « cavité » : (a) - dispositif expérimental permettant d'obtenir un écoulement de Couette dans des cavités rigides et (b) - représentation d'une cavité.

L'acquisition est effectuée avec une caméra CCD Photron-Fastcam dont la fréquence d'acquisition est de 2000 Hz pour une résolution de  $1024 \times 1024$  pixels avec une sensibilité de 8 bits en niveau de gris. L'objectif utilisé est un AF Nikkor de 105 mm permettant d'obtenir un champ de  $35 \times 35 \text{ mm}^2$  à une distance de 70 cm du plan image. Le laser utilisé pour illuminer la section de mesure est un ND-Yaq Quantronix Darwin Duo qui possède deux cavités ayant chacune une puissance de 18 mJ par pulse. L'ensemencement de l'écoulement est réalisé avec des particules de verre creuses argentées en surface ayant un diamètre moyen de  $10 \mu\text{m}$ .

Les champs de déplacement sont calculés grâce à une méthode d'inter-corrélation par FFT avec fenêtres adaptatives de  $64 \times 64$  pixels vers  $16 \times 16$  pixels avec un taux de recouvrement de 50 %. La résolution de ces champs est de  $102 \times 73$  vecteurs. Un seuillage par rapport au niveau du rapport signal-sur-bruit est appliqué sur chaque champ, ainsi qu'un filtre médian. Les données présentées ici sont adimensionnées par rapport à la taille de l'entrefers et la vitesse de

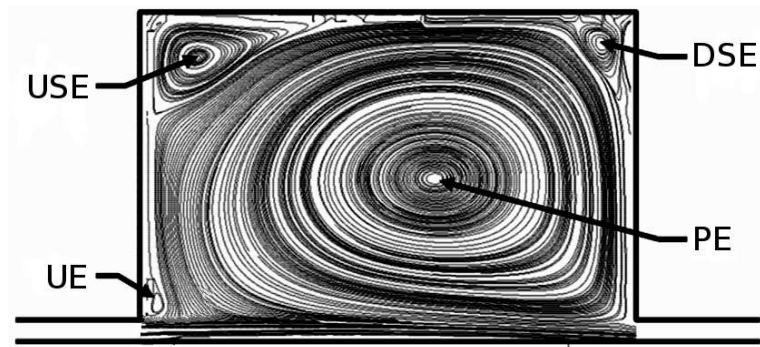


FIGURE 4.2 – Séquence « cavité » : topologie de l'écoulement au sein d'une cavité avec le tourbillon primaire (PE), le tourbillon secondaire amont (USE), le tourbillon secondaire aval (DSE) et la zone de décollement (UE).

la roue. Cet adimensionnement est obtenu en divisant les données par les valeurs de référence choisies. Cela permet d'étudier un écoulement en s'affranchissant de certaines grandeurs physiques liées, par exemple, aux conditions expérimentales. Il devient alors possible de comparer plusieurs écoulements présentant des conditions différentes. Dans le cas de la cavité, nous pouvons, par exemple, comparer nos résultats avec des séquences dont la taille de l'entrefer ou la vitesse de la roue sont différentes. L'écoulement étant dans un régime stationnaire, nous limitons notre étude à 50 champs de déplacement. La FIGURE 4.3 représente trois champs instantanés extraits de cette séquence. La FIGURE 4.4 représente le champ moyen basé sur ces 50 échantillons. La FIGURE 4.5 représente les histogrammes de la composante  $V^1$ , de la composante  $V^2$  et de la norme, pour l'ensemble des champs de la séquence. En étudiant ces histogrammes, nous constatons qu'il n'y a pas d'effet de blocage de pics : la qualité des mesures et des calculs permettent donc une bonne exploitation de la séquence. Nous pouvons cependant noter un étalement de l'histogramme des normes. Cela signifie que plusieurs centaines de vecteurs possèdent une norme beaucoup plus importante que la moyenne. Ces vecteurs sont généralement localisés dans la zone à fortes vitesses proche de la roue et correspondent à du bruit lié à la présence de la paroi sur les images traitées.

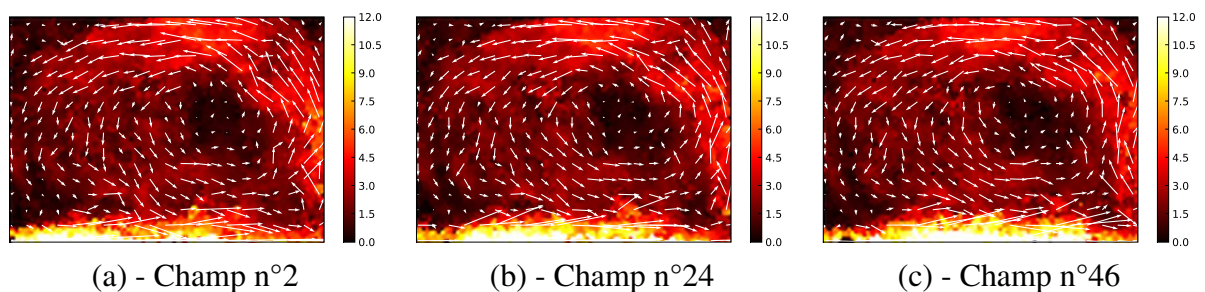


FIGURE 4.3 – Séquence « cavité » : représentation de trois champs de déplacement instantanés extraits de la séquence. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

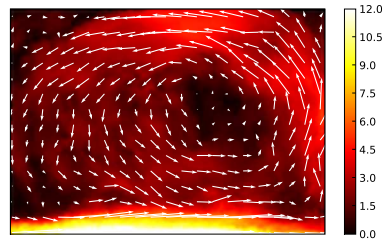


FIGURE 4.4 – Séquence « cavité » : représentation du champ de déplacement moyen. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

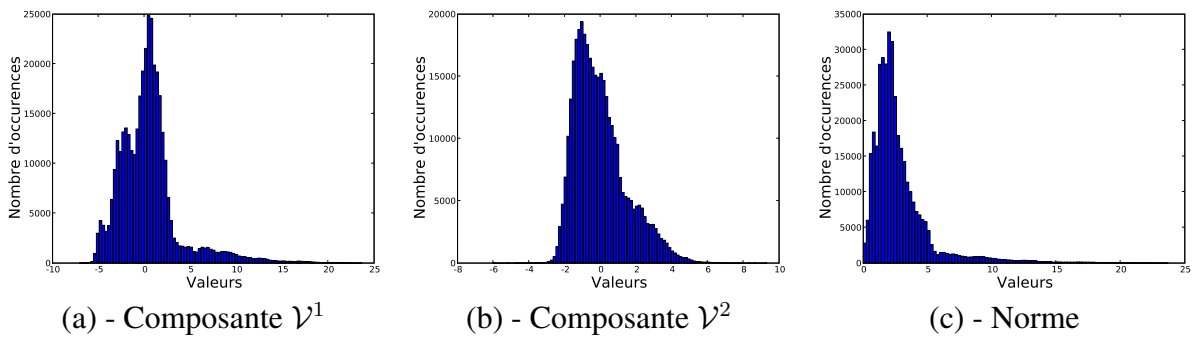


FIGURE 4.5 – Séquence « cavité » : (a) - histogramme de la composante  $V^1$  ; (b) - histogramme de la composante  $V^2$  et (c) - histogramme de la norme.

#### 4.1.1 Étude par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

Tout d'abord, nous modélisons cette séquence par une décomposition orthogonale aux valeurs propres de type « snapshot ». Pour pouvoir comparer notre méthode avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres, nous appliquons cette décomposition sur l'ensemble des champs instantanés de la séquence. La FIGURE 4.6 représente la contribution de chaque mode ainsi que la contribution cumulée, exprimée en pourcent, en fonction du nombre de modes POD conservés. Nous constatons alors que plus de 92 % de l'énergie cinétique est contenue dans le premier mode représenté FIGURE 4.7-(a). Les autres modes n'apportent, quant à eux, que peu d'information. Par exemple, les deuxième et troisième modes ne contiennent respectivement que 1.96 % et 0.71 % de l'énergie cinétique. En étudiant leur représentation, donnée FIGURE 4.7-(b) et (c), nous constatons que ces modes, ainsi que les suivants, n'apportent plus d'information globale concernant l'écoulement mais modélisent essentiellement des variations locales, composées en partie de bruit. Dans notre cas, le premier mode POD contient une grande partie de l'énergie cinétique car, comme nous l'avons précisé précédemment, la topologie de l'écoulement n'évolue pas au cours du temps. Les champs de déplacement de la séquence se ressemblent donc fortement. Une grande quantité de l'énergie cinétique de ces champs est alors modélisée par le premier mode, qui correspond au champ moyen.

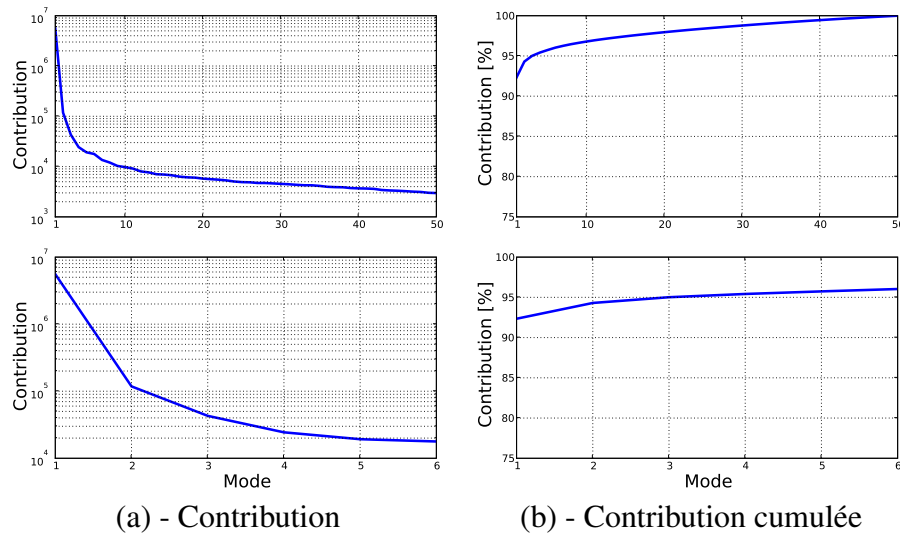


FIGURE 4.6 – Séquence « cavité » : (a) - contribution de chaque mode POD (en haut) et contribution des six premiers modes POD (en bas) ; (b) - contribution cumulée, exprimée en pourcent, en fonction du nombre de modes POD conservés (en haut) et contribution cumulée des six premiers modes POD, exprimée en pourcent, en fonction du nombre de modes POD conservés (en bas).

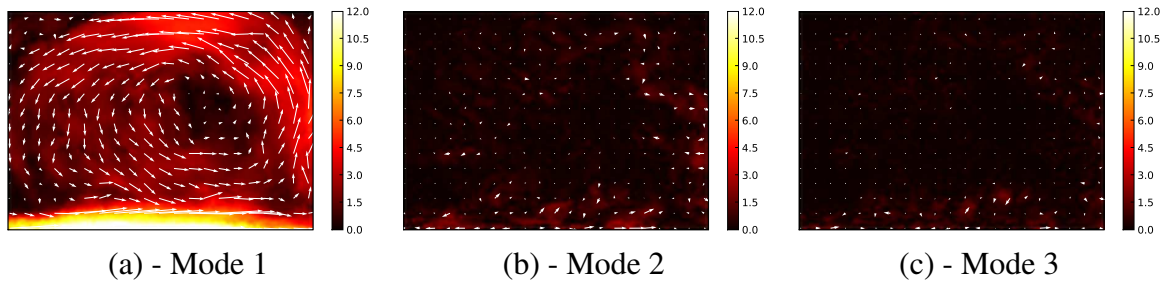


FIGURE 4.7 – Séquence « cavité » : représentation des trois premiers modes POD. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

#### 4.1.2 Étude du mouvement dominant

Nous étudions maintenant le comportement de notre modèle dans le cas d'une modélisation extrêmement simplifiée, c'est-à-dire en utilisant une base de degré 1. L'équation générale du mouvement contenu dans un champ de déplacement est alors :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}^1 &= \tilde{v}_{0,0}^1 P_{0,0} + \tilde{v}_{1,0}^1 P_{1,0} + \tilde{v}_{0,1}^1 P_{0,1} \\ \tilde{\mathcal{V}}^2 &= \tilde{v}_{0,0}^2 P_{0,0} + \tilde{v}_{1,0}^2 P_{1,0} + \tilde{v}_{0,1}^2 P_{0,1} \end{cases} \quad (4.2)$$

Comme nous l'avons précisé au chapitre 2, nous utilisons la base composée des polynômes de Legendre normalisés. Les polynômes qui constituent une base de degré 1 sont les suivants :

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ P_{0,0} = \frac{1}{2}, \quad P_{1,0} = \frac{\sqrt{3}}{2} x_1, \quad P_{0,1} = \frac{\sqrt{3}}{2} x_2 \right\} \quad (4.3)$$

Tout d'abord, nous limitons notre étude à un seul champ de la séquence. Par exemple, la projection du 24<sup>e</sup> champ, représenté FIGURE 4.8-(a), sur la base  $\mathcal{B}_1$  fournit les six coefficients de projection suivants :

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{0,0}^1 &= 0.83 & \tilde{v}_{1,0}^1 &= -0.29 & \tilde{v}_{0,1}^1 &= -4.94 \\ \tilde{v}_{0,0}^2 &= -0.02 & \tilde{v}_{1,0}^2 &= 2.01 & \tilde{v}_{0,1}^2 &= 0.23 \end{aligned} \quad (4.4)$$

D'après les équations (4.2) et (4.3), l'équation générale du mouvement de ce champ est :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}^1 = 0.41 - 0.25 x_1 - 4.28 x_2 \\ \tilde{\mathcal{V}}^2 = -0.01 + 1.74 x_1 + 0.20 x_2 \end{cases} \quad (4.5)$$

Nous effectuons alors une étude par portraits de phase. Nous calculons donc les valeurs propres de la matrice composée des coefficients associés aux monômes de degré 1. Nous obtenons les valeurs propres complexes  $\lambda_1 = -0.03 + 3.14 i$  et  $\lambda_2 = -0.03 - 3.14 i$ . Nous en déduisons que le mouvement dominant du champ est un mouvement elliptique [Rao 92]. Le centre de l'ellipse est donné par les coefficients associés aux monômes de degré 0. Le sens de rotation et la quantité de mouvement sont déterminés par les coefficients associés aux monômes de degré 1. Une représentation de ce mouvement est donnée FIGURE 4.8-(b). Nous constatons que le mouvement de ce champ est bien un mouvement elliptique.

Nous modélisons maintenant ce même champ avec une base de degré 5. Nous obtenons alors 21 coefficients de projection par composante. En étudiant le champ issu de cette modélisation simplifiée, représenté FIGURE 4.8-(c), nous constatons que le centre du tourbillon principal est bien localisé, la zone à forte vitesse est correctement modélisée et les structures secondaires commencent à apparaître. Dans ce cas, la modélisation reste donc simplifiée mais elle fournit déjà des informations concernant les structures qui composent l'écoulement.

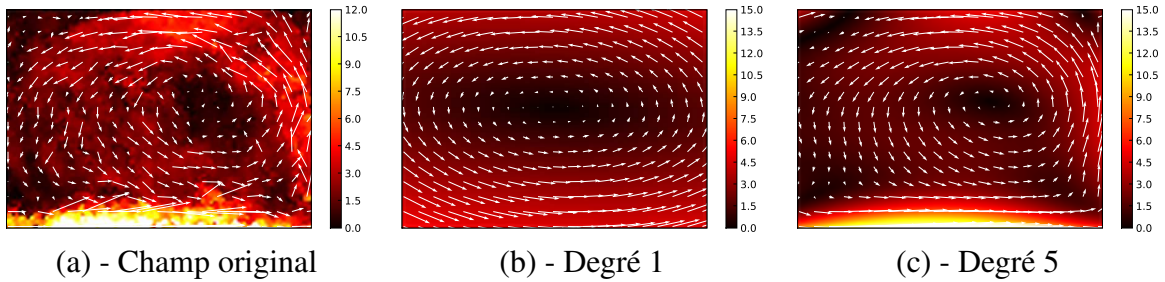


FIGURE 4.8 – Séquence « cavité » : (a) - 24<sup>e</sup> champ instantané extrait de la séquence originale ; (b) - modélisation simplifiée du champ par une base de degré 1 et (c) - modélisation simplifiée du champ par une base de degré 5. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

### 4.1.3 Quantité d'énergie cinétique modélisée

Nous étudions maintenant la quantité d'énergie cinétique modélisée par notre méthode. Pour cela, nous définissons l'énergie d'un champ de taille  $M \times N$  de la façon suivante :

$$E = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \|\vec{u}(m, n)\|^2 \quad (4.6)$$



avec  $\vec{u}(m, n)$  un vecteur du champ. À partir de cette mesure, nous définissons la quantité  $Q$  représentant la quantité d'énergie modélisée par rapport à la quantité d'énergie de la séquence originale. Elle s'exprime en pourcent et est définie de la façon suivante :

$$Q_{[\%]} = \frac{E_r}{E_o} \times 100 \quad (4.7)$$

avec  $E_o$  l'énergie totale de la séquence originale et  $E_r$  l'énergie totale de la séquence reconstruite à partir du modèle.

Nous étudions alors l'évolution de cette quantité  $Q$  en fonction du degré de la base. Nous faisons varier ce degré entre 0 et 35. Les résultats obtenus sont donnés FIGURE 4.9-(a). Nous remarquons alors que la quantité  $Q$  converge vers 100 % : plus le degré de la base est élevé, plus la quantité d'énergie cinétique modélisée est proche de la quantité d'énergie cinétique de la séquence originale. Cela signifie que, pour un degré donné, la quantité d'énergie modélisée est supérieure ou égale à la quantité d'énergie modélisée par des bases de degrés inférieurs.

Nous comparons également ces résultats avec ceux obtenus par une décomposition orthogonale aux valeurs propres, présentés FIGURE 4.9-(b). Nous constatons alors qu'une base de degré 7 permet de modéliser plus de 92 % de l'énergie cinétique de la séquence originale, c'est-à-dire l'équivalent du premier mode POD. Cette figure montre que la convergence de notre méthode est plus lente qu'avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres qui, par définition, est optimale au sens de l'énergie cinétique. Nous souhaitons tout de même signaler qu'il semble délicat d'essayer de superposer les deux courbes dans le but de faire une comparaison directe des quantités d'énergie cinétique modélisées par les deux méthodes. En effet, pour ce type de comparaison, le lien entre le nombre de modes POD, dépendant de la séquence, et le degré de la base, fixé sans connaissance de l'écoulement, n'est pas forcément évident.

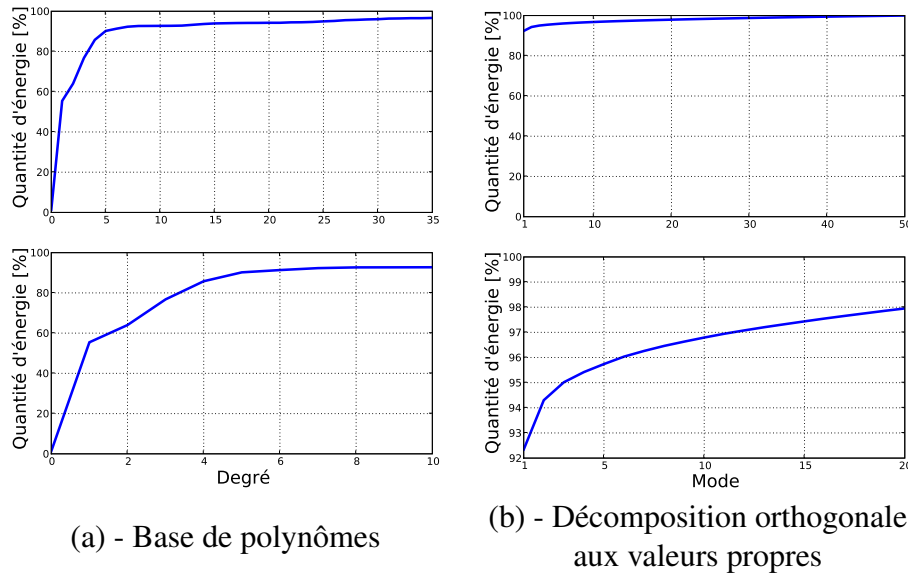


FIGURE 4.9 – Séquence « cavité » : (a) - quantité d'énergie cinétique modélisée en fonction du degré de la base pour une modélisation par base de polynômes, le degré de la base variant entre 0 et 35 (en haut) et entre 0 et 10 (en bas) ; (b) - quantité d'énergie cinétique modélisée en fonction du nombre de modes pour une modélisation par décomposition orthogonale aux valeurs propres, en conservant entre 1 et 50 modes (en haut) et 1 et 20 modes (en bas).

#### 4.1.4 Étude de l'évolution temporelle des coefficients

Nous étudions maintenant l'évolution temporelle des coefficients de projection pour l'ensemble de la séquence. Nous projetons donc chaque champ sur une base de degré 7, ce qui permet de modéliser plus de 92 % de l'énergie cinétique. Nous calculons alors l'énergie de chaque coefficient de la façon suivante :

$$E_{\tilde{v}_{i,j}^c} = \sum_{t=1}^T (\tilde{v}_{i,j}^c)^2 \quad (4.8)$$

avec  $\tilde{v}_{i,j}^c$  un coefficient de projection et  $T$  le nombre de champs dans la séquence. Le TABLEAU 4.1 présente, pour chaque composante, les cinq coefficients les plus énergétiques triés par ordre décroissant. Pour pouvoir comparer les résultats avec d'autres méthodes telles que la décomposition orthogonale aux valeurs propres, l'énergie des coefficients présentée ici est calculée par rapport à l'énergie totale de la séquence originale et non pas par rapport à l'énergie totale obtenue après modélisation. Dans notre cas, une base de degré 7 modélise 92 % de l'énergie originale. Pour chaque composante, la somme des énergies portées par les 36 coefficients est donc égale à 92 % et non pas à 100 %. Nous remarquons alors que, pour chaque composante, parmi ces 36 coefficients, les cinq coefficients les plus énergétiques sont des coefficients associés à des polynômes d'ordre faible. Cela confirme les résultats précédents où une modélisation avec une base de degré 5 fournit déjà une bonne approximation des champs de déplacement. Nous notons également la décroissance rapide de l'énergie portée par chaque coefficient. De plus, les coefficients les plus énergétiques sont les coefficients  $\tilde{v}_{0,1}^1$  et  $\tilde{v}_{1,0}^2$ . Or, nous avons vu au chapitre 3.1 que ces coefficients permettent de modéliser des mouvements de rotation. Nous retrouvons donc bien comme mouvement dominant de la séquence le tourbillon principal. Finalement, nous pouvons remarquer que la quantité d'énergie modélisée par chaque composante évolue de façon similaire. Nous pouvons donc en déduire que la quantité de mouvement horizontal est sensiblement identique à la quantité de mouvement vertical.

TABLEAU 4.1 – Séquence « cavité » : énergie et énergie cumulée, exprimées en pourcent, des cinq coefficients de projection les plus énergétiques, pour chaque composante.

Coefficient	Énergie	Énergie cumulée	Coefficient	Énergie	Énergie cumulée
$\tilde{v}_{0,1}^1$	58.57%	58.57%	$\tilde{v}_{1,0}^2$	51.18%	51.18%
$\tilde{v}_{2,1}^1$	07.95%	66.52%	$\tilde{v}_{2,0}^2$	14.76%	65.94%
$\tilde{v}_{0,4}^1$	07.42%	73.94%	$\tilde{v}_{1,2}^2$	13.68%	79.63%
$\tilde{v}_{0,2}^1$	06.58%	80.52%	$\tilde{v}_{2,2}^2$	04.26%	83.89%
$\tilde{v}_{0,3}^1$	03.33%	83.85%	$\tilde{v}_{1,1}^2$	02.12%	86.01%

(a) - Composante  $\tilde{\mathcal{V}}^1$

(b) - Composante  $\tilde{\mathcal{V}}^2$

La FIGURE 4.10 présente, pour chaque composante, l'évolution temporelle de ces cinq coefficients de projection les plus énergétiques. Nous constatons alors que tous les coefficients restent stables au cours du temps. Nous en déduisons que la topologie de l'écoulement reste identique pour toute la séquence. L'étude du mouvement dominant effectuée précédemment sur le 24<sup>e</sup> champ peut donc être reportée sur tous les autres champs de la séquence.



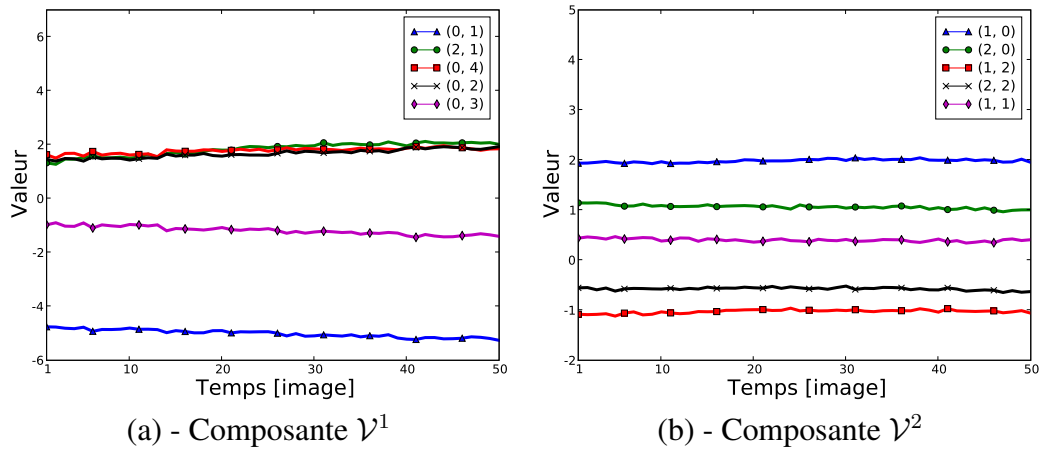


FIGURE 4.10 – Séquence « cavité » : évolution temporelle des cinq coefficients de projection les plus énergétiques pour (a) - la composante  $\mathcal{V}^1$  et (b) - la composante  $\mathcal{V}^2$ .

#### 4.1.5 Temps de calcul et occupation mémoire

Nous étudions les temps de calcul et l'occupation mémoire de notre méthode pour une modélisation à 92 % de l'énergie cinétique, c'est-à-dire en utilisant une base de degré 7. Les calculs sont effectués sur l'ordinateur présenté au chapitre 3. Les temps obtenus sont les suivants :

- génération d'une base orthonormale de degré 7 : 30 ms
- calcul des valeurs précalculées : 610 ms
- projection des 50 champs de la séquence : 137 ms soit 2.74 ms/champ (=364 champs/s)

L'occupation mémoire est la suivante :

- base orthonormale de degré 7 : 36 polynômes
- valeurs précalculées : 268 056 réels
- un champ de la séquence : 14 892 réels

#### 4.1.6 Réduction des données

Finalement, nous étudions la capacité de notre modèle à compresser les données. Nous effectuons également une comparaison avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Les résultats obtenus sont présentés TABLEAU 4.2. Nous constatons alors que le nombre de réels nécessaire par chaque méthode pour modéliser 92 % de l'énergie cinétique de cette séquence est relativement identique. Dans les deux cas, ces taux de compression sont importants.

TABLEAU 4.2 – Séquence « cavité » : taux de compression obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et notre méthode (MBP). Pour les deux modèles, la quantité d'énergie cinétique modélisée est de 92 %. La séquence est composée de 50 champs de taille  $102 \times 73$ . Elle est donc représentée par 744 600 réels.

Énergie modélisée	POD			MBP		
	modes	réels	taux de compression	degré	réels	taux de compression
92 %	1	14 942	97.99 %	7	3 600	99.52 %

## 4.2 Écoulement en aval d'un demi-cylindre

La seconde séquence représente l'évolution de lâchers tourbillonnaires alternés dans le sillage d'un demi-cylindre. Cette séquence est issue des travaux présentés dans [David 05b]. Le fluide utilisé est de l'eau dont la vitesse uniforme en amont est de 2 cm/s. Le nombre de Reynolds est  $Re = 437$ . Pour ce faible nombre de Reynolds, nous pouvons constater le phénomène suivant :

- un tourbillon se forme sur un coin du demi-cylindre ;
- ce tourbillon se détache du demi-cylindre et suit une trajectoire rectiligne en se dissipant ;
- pendant ce temps, un autre tourbillon se forme sur l'autre coin du demi-cylindre ;
- ce nouveau tourbillon se détache à son tour et suit également une trajectoire rectiligne en se dissipant ;
- ce processus se répète de façon périodique.

Nous étudions ici la zone située en aval du demi-cylindre. La topologie de l'écoulement dans cette zone est présentée FIGURE 4.11.

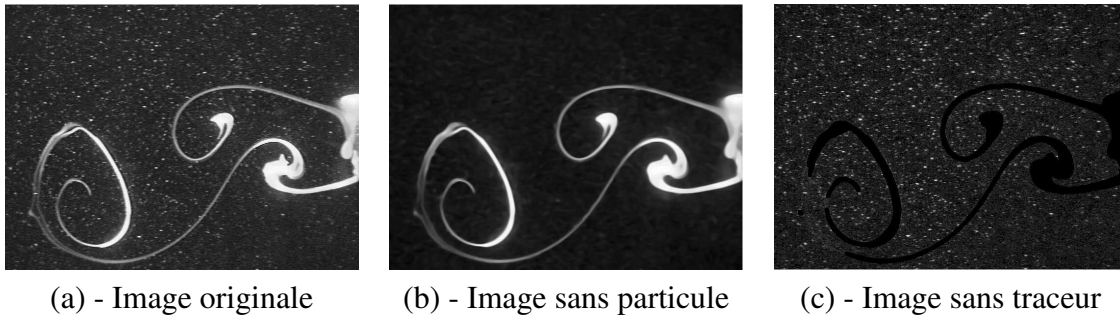


FIGURE 4.11 – Séquence « demi-cylindre » : topologie de l'écoulement.

L'acquisition est effectuée avec un caméscope VHS Handycam Sony cadencé à 25 images par seconde. Le film est ensuite numérisé grâce à une carte d'acquisition. En raison de la faible vitesse de l'écoulement, la séquence obtenue est résolue dans le temps. L'ensemencement de l'écoulement est réalisé avec, d'une part, des traceurs continus obtenus par électrolyse d'un fil d'étain avec une plaque de cuivre et, d'autre part, des particules de verre creuses. Le processus de séparation des deux informations est détaillé dans [David 05b].

Les champs de déplacement sont calculés grâce à une méthode d'inter-corrélation par FFT avec des fenêtres adaptatives de  $64 \times 64$  pixels vers  $32 \times 32$  pixels sur les images de particules. La résolution de ces champs est de  $90 \times 67$  vecteurs. La faible quantité de particules présentes dans le fluide ne permet pas d'obtenir une résolution spatiale plus précise. Un seuillage par rapport au niveau du rapport signal-sur-bruit est appliqué sur chaque champ. Les données présentées ici sont adimensionnées par rapport à la taille du demi-cylindre et la vitesse en amont de la zone étudiée. La séquence est composée de 540 champs représentant deux périodes du phénomène étudié. La FIGURE 4.12 représente trois champs instantanés extraits de cette séquence. La FIGURE 4.13 représente le champ moyen. La FIGURE 4.14 représente les histogrammes de la composante  $\mathcal{V}^1$ , de la composante  $\mathcal{V}^2$  et de la norme, pour l'ensemble des champs de la séquence. La FIGURE 4.15 représente un zoom sur une partie des histogrammes de la composante  $\mathcal{V}^1$ , de la composante  $\mathcal{V}^2$  et de la norme, pour l'ensemble des champs de la séquence avant l'adimensionnement des données. Nous pouvons constater un effet de blocage de pics. La qualité de la séquence n'est donc pas optimale. Cela s'explique par la faible résolution du film VHS,

l'introduction de bruit lors de sa numérisation et, comme nous l'avons précisé précédemment, l'absence d'information dans certaines parties des images liée à la suppression des traceurs. De plus, l'étalement des différents histogrammes indique la présence de vecteurs bruités.

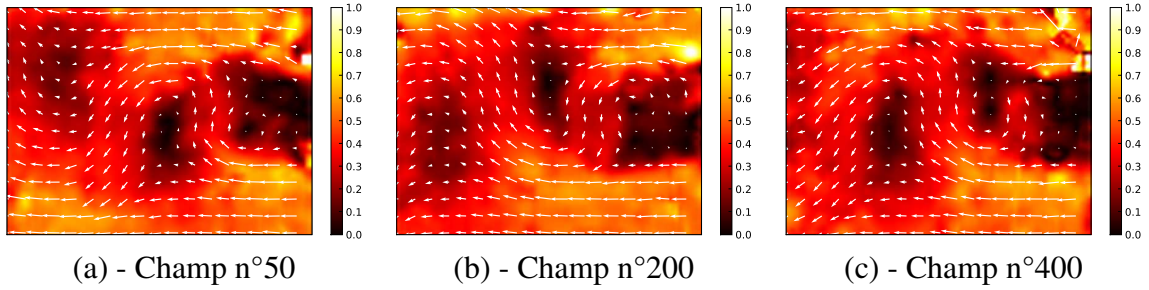


FIGURE 4.12 – Séquence « demi-cylindre » : représentation de trois champs de déplacement instantanés extraits de la séquence. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

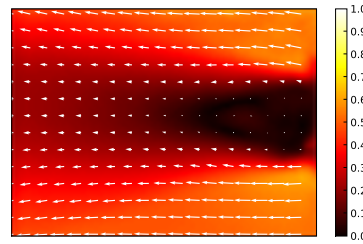


FIGURE 4.13 – Séquence « demi-cylindre » : représentation du champ de déplacement moyen. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

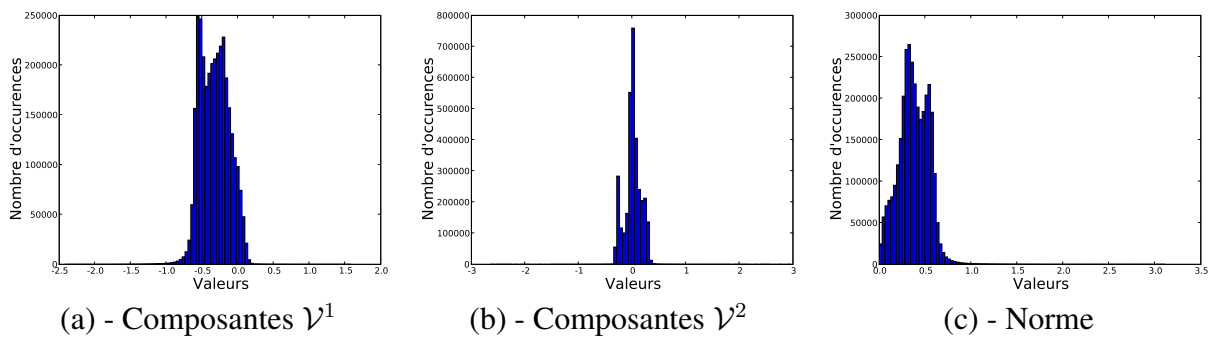


FIGURE 4.14 – Séquence « demi-cylindre » : (a) - histogramme de la composante  $\mathcal{V}^1$  ; (b) - histogramme de la composante  $\mathcal{V}^2$  ; (c) - histogramme de la norme.

#### 4.2.1 Étude par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

Tout d'abord, nous modélisons cette séquence par une décomposition orthogonale aux valeurs propres de type « snapshot ». Pour pouvoir comparer notre méthode avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres, nous appliquons cette décomposition sur l'ensemble des

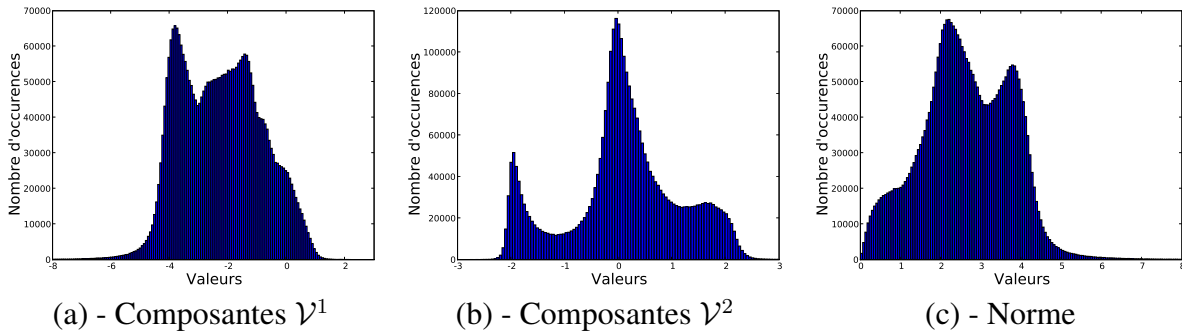


FIGURE 4.15 – Séquence « demi-cylindre » : (a) - zoom sur une partie de l'histogramme de la composante  $V^1$  ; (b) - zoom sur une partie de l'histogramme de la composante  $V^2$  ; (c) - zoom sur une partie de l'histogramme de la norme. La présence de plusieurs pics sur des valeurs entières indique un effet de blocage de pics. Les valeurs présentées ici sont celles obtenues avant l'adimensionnement des données.

champs instantanés de la séquence. La FIGURE 4.16 représente la contribution de chaque mode ainsi que la contribution cumulée, exprimée en pourcent, en fonction du nombre de modes. Nous pouvons remarquer l'évolution par paire des premières valeurs propres. Ce phénomène est significatif d'un écoulement périodique. Le TABLEAU 4.3 donne la contribution de quelques modes. Nous constatons alors que plus de 95 % de l'énergie cinétique est contenue dans les 3 premiers modes et plus de 99 % dans les 104 premiers modes. Le premier mode représente le champ moyen de l'écoulement. Il est représenté FIGURE 4.17-(a). Les deuxième et troisième modes, représentés FIGURE 4.17-(b) et FIGURE 4.17-(c), modélisent, quant à eux, les tourbillons qui se forment en aval du demi-cylindre et qui s'en échappent. Nous pouvons toutefois noter que ces deux modes spatiaux ne sont jamais visibles dans l'écoulement et sont donc difficiles à interpréter.

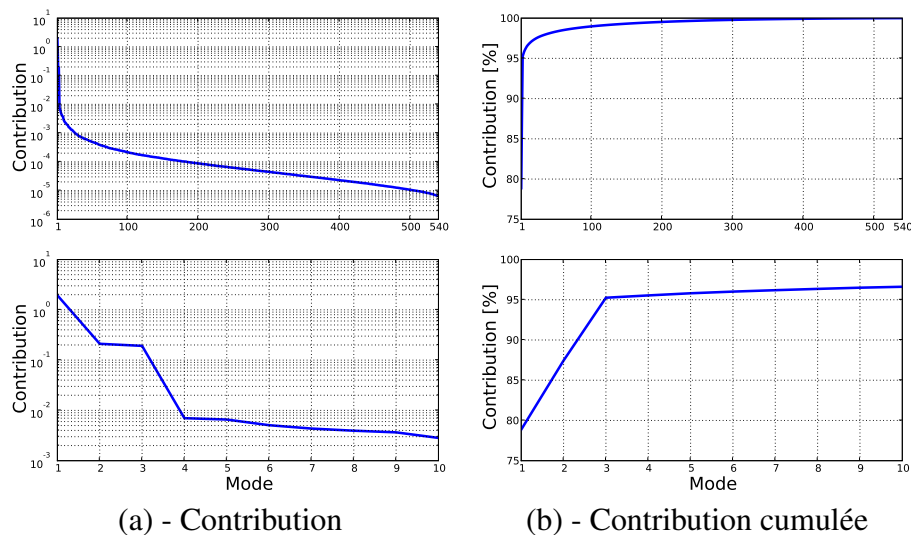


FIGURE 4.16 – Séquence « demi-cylindre » : (a) - contribution de chaque mode POD (en haut) et contribution des dix premiers modes POD (en bas) ; (b) - contribution cumulée, exprimée en pourcent, en fonction du nombre de modes POD conservés (en haut) et contribution cumulée des dix premiers modes POD, exprimée en pourcent, en fonction du nombre de modes POD conservés (en bas).

TABLEAU 4.3 – Séquence « demi-cylindre » : contribution et contribution cumulée, exprimées en pourcent, de quelques modes.

Mode	Contribution	Contribution cumulée
1	78.87 %	78.87 %
2	08.58 %	87.45 %
3	07.81 %	95.25 %
4	00.28 %	95.54 %
5	00.27 %	95.81 %
⋮	⋮	⋮
104	00.01 %	99.01 %

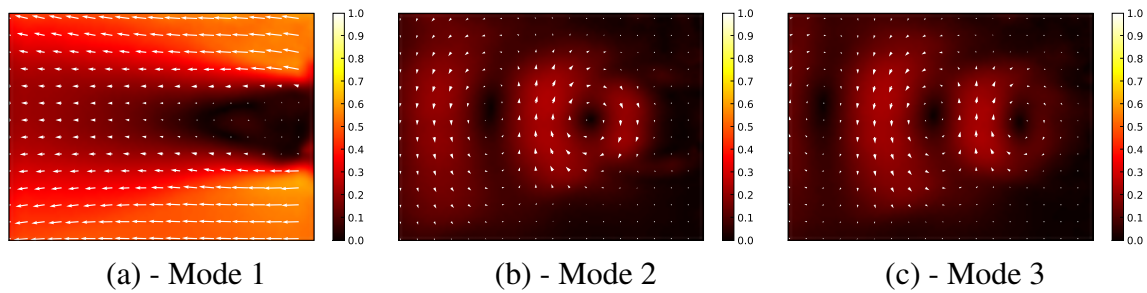
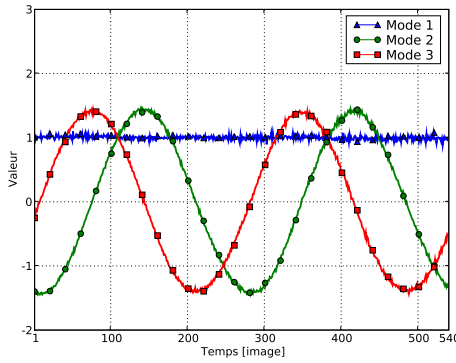


FIGURE 4.17 – Séquence « demi-cylindre » : représentation des trois premiers modes POD. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

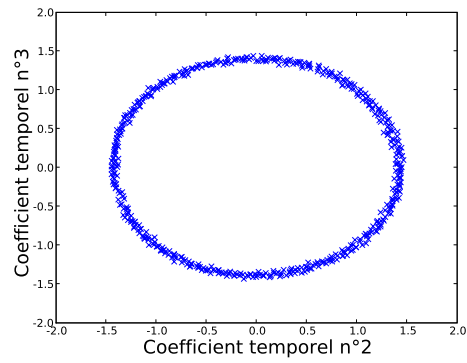
L'étude de l'évolution temporelle des coefficients associés à ces trois modes, représentée FIGURE 4.18, permet de retrouver le phénomène périodique des lâchers tourbillonnaires. En étudiant le portrait de phase entre les deuxième et troisième coefficients temporels, nous constatons que celui-ci possède une forme circulaire caractéristique des phénomènes périodiques.

#### 4.2.2 Qualité de la modélisation par base de polynômes

Nous étudions maintenant l'évolution de la quantité  $\mathcal{Q}$  d'énergie cinétique définie en (4.7) en fonction du degré de la base. Nous faisons varier ce degré entre 0 et 35. La FIGURE 4.19-(a) représente la quantité d'énergie modélisée par notre méthode en fonction du degré de la base. La FIGURE 4.19-(b) représente la quantité d'énergie modélisée par la décomposition orthogonale aux valeurs propres en fonction du nombre de modes conservés. Nous constatons alors que plus de 95 % de l'énergie, c'est-à-dire l'équivalent d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres avec 3 modes, est modélisée en utilisant une base de degré 7 et plus de 99 % de l'énergie, c'est-à-dire l'équivalent d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres avec 104 modes, est modélisée en utilisant une base de degré 22. Nous avons vu précédemment que notre méthode permet d'obtenir une modélisation simplifiée du mouvement. Nous constatons ici qu'elle permet également d'obtenir une modélisation beaucoup plus précise de ce mouvement en utilisant des degrés plus élevés.

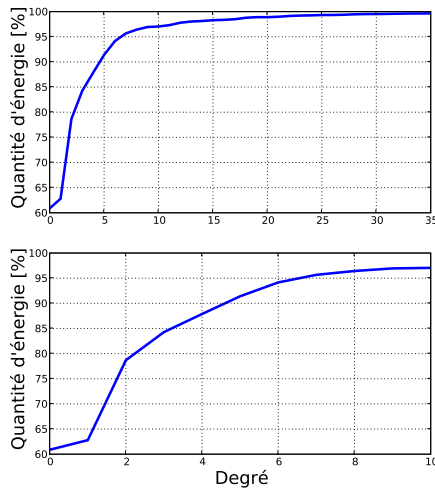


(a) - Évolution temporelle des coefficients de projection

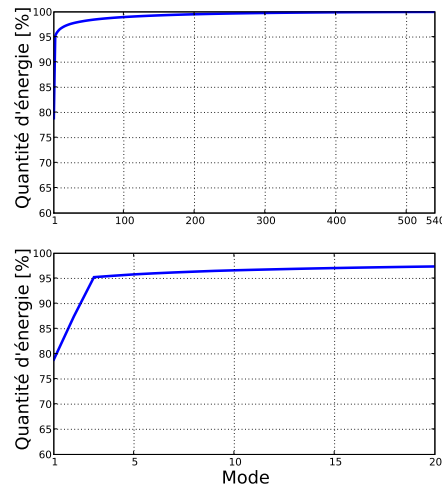


(b) - Portrait de phase entre les deuxième et troisième coefficients temporels

FIGURE 4.18 – Séquence « demi-cylindre » : (a) - évolution temporelle des trois coefficients associés aux trois premiers modes POD ; (b) - portrait de phase entre les deuxième et troisième coefficients temporels POD. La forme circulaire de ce portrait est caractéristique d'un écoulement périodique.



(a) - Base de polynômes



(b) - Décomposition orthogonale aux valeurs propres

FIGURE 4.19 – Séquence « demi-cylindre » : (a) - quantité d'énergie cinétique modélisée en fonction du degré de la base pour une modélisation par base de polynômes, le degré de la base variant entre 0 et 35 (en haut) et entre 0 et 10 (en bas) ; (b) - quantité d'énergie cinétique modélisée en fonction du nombre de modes pour une modélisation par décomposition orthogonale aux valeurs propres, en conservant entre 1 et 540 modes (en haut) et entre 1 et 20 modes (en bas).

Nous venons de déterminer la quantité d'énergie modélisée par rapport à la quantité d'énergie originale, pour l'ensemble de la séquence. Nous étudions maintenant la quantité d'énergie modélisée pour chaque champ. Nous obtenons les résultats présentés FIGURE 4.20. En étudiant la quantité d'énergie modélisée par une décomposition orthogonale aux valeurs propres avec 3 modes, nous constatons, pour certains champs, la présence de pics signifiant une erreur de modélisation importante. Ce phénomène est moins marqué avec une modélisation par base de polynômes en utilisant une base de degré 7. Bien que les deux méthodes modélisent

en moyenne la même quantité d'énergie, notre méthode semble fournir des résultats plus réguliers. Ces résultats sont confirmés en étudiant l'écart-type, la valeur minimale et la valeur maximale de la quantité d'énergie modélisée, présentés TABLEAU 4.4. Lors d'une modélisation de 99 % de l'énergie cinétique, en utilisant une décomposition orthogonale aux valeurs propres avec 104 modes ou une modélisation par base de polynômes avec une base de degré 22, cet effet est moins marqué. Ces résultats semblent surprenants car la décomposition orthogonale aux valeurs propres se base sur un tenseur des corrélations spatio-temporelles pour déterminer les différents modes. On pourrait donc s'attendre à obtenir des résultats plus réguliers avec cette méthode. Cependant, nous avons vu au chapitre 3 que notre méthode est résistante au bruit car elle lisse le champ traité. Ce lissage semble donc rendre les champs plus réguliers qu'avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres.

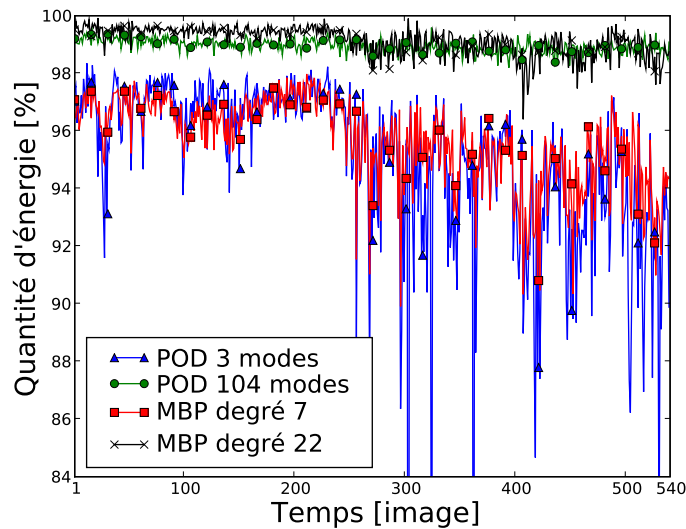


FIGURE 4.20 – Séquence « demi-cylindre » : comparaison de la quantité d'énergie cinétique modélisée pour chaque champ de la séquence par une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et une modélisation par base de polynômes (MBP).

TABLEAU 4.4 – Séquence « demi-cylindre » : moyenne, écart-type, valeur minimale et valeur maximale de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) ou notre méthode (MBP).

Modèle	Moyenne	Écart-type	Minimum	Maximum
POD 3 modes	95.01 %	3.32	59.06 %	98.35 %
MBP degré 7	95.67 %	1.51	89.91 %	97.98 %
POD 104 modes	98.95 %	0.22	98.19 %	99.63 %
MBP degré 22	99.14 %	0.48	96.41 %	99.92 %

### 4.2.3 Étude de l'évolution temporelle des coefficients

Finalement, nous étudions l'évolution temporelle des coefficients après projection sur une base de degré 22, ce qui correspond à une modélisation à 99 % de l'énergie cinétique. Pour



chaque composante, les cinq coefficients les plus énergétiques sont donnés TABLEAU 4.5. Comme pour la séquence « cavité », nous constatons que, pour chaque composante, parmi les 276 coefficients issus de cette projection, les coefficients les plus énergétiques sont ceux associés à des polynômes de degrés faibles. L'évolution temporelle de ces coefficients est donnée FIGURE 4.21. Nous constatons que le coefficient  $\tilde{v}_{0,0}^1$  est beaucoup plus énergétique que les autres coefficients. De plus, d'après la FIGURE 4.21-(a), il reste stable au cours du temps et est négatif. Or nous avons vu précédemment que ce coefficient correspond au mouvement de translation rectiligne uniforme horizontal orienté, selon notre référentiel, de la gauche vers la droite. Nous en déduisons donc que le mouvement dominant de la séquence est un mouvement de translation rectiligne uniforme orienté de la droite vers la gauche. De plus, la valeur de ce coefficient de projection nous fournit une première approximation sur l'amplitude de ce mouvement rectiligne. En effet, pour toute la séquence, ce coefficient vaut environ 0.65, ce qui correspond, d'après l'équation (3.7), à un déplacement rectiligne uniforme d'environ 0.325 unité par image. Ces résultats peuvent se vérifier en étudiant le champ moyen.

TABLEAU 4.5 – Séquence « demi-cylindre » : énergie et énergie cumulée, exprimées en pourcent, des cinq coefficients les plus énergétiques, pour chaque composante.

N°	Coefficient	Énergie	Énergie cumulée	N°	Coefficient	Énergie	Énergie cumulée
1	$\tilde{v}_{0,0}^1$	71.49 %	71.49 %	1	$\tilde{v}_{3,0}^2$	18.77 %	18.77 %
2	$\tilde{v}_{0,2}^1$	12.44 %	83.53 %	2	$\tilde{v}_{2,0}^2$	15.00 %	33.77 %
3	$\tilde{v}_{0,4}^1$	02.49 %	86.42 %	3	$\tilde{v}_{4,0}^2$	13.82 %	47.59 %
4	$\tilde{v}_{1,4}^1$	01.47 %	87.89 %	4	$\tilde{v}_{5,0}^2$	07.30 %	54.89 %
5	$\tilde{v}_{1,2}^1$	01.32 %	89.21 %	5	$\tilde{v}_{1,0}^2$	06.80 %	61.69 %
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
17	$\tilde{v}_{1,0}^1$	00.23 %	95.01 %	65	$\tilde{v}_{11,0}^2$	00.05 %	95.04 %

(a) - Composante  $\tilde{\mathcal{V}}^1$

(b) - Composante  $\tilde{\mathcal{V}}^2$

Le deuxième coefficient le plus énergétique de la composante  $\mathcal{V}^1$  est le coefficient  $\tilde{v}_{0,2}^1$ . Il représente plus de 12 % de l'énergie. Les coefficients  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,2}^1$  portent alors, à eux deux, plus de 83 % de l'énergie de la composante  $\mathcal{V}^1$ . Nous décidons donc d'étudier le champ modélisé par la moyenne temporelle de ces deux coefficients, c'est-à-dire ayant comme équation analytique :

$$\begin{cases} \mathcal{V}^1 &= \overline{\tilde{v}_{0,0}^1} P_{0,0} + \overline{\tilde{v}_{0,2}^1} P_{0,2} \\ \mathcal{V}^2 &= 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

avec  $\overline{\tilde{v}_{0,0}^1}$  et  $\overline{\tilde{v}_{0,2}^1}$  les moyennes temporelles respectives des coefficients de projection  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,2}^1$ . Le champ obtenu est représenté FIGURE 4.22-(a). La FIGURE 4.22-(b) représente le champ ayant pour équation analytique :

$$\begin{cases} \mathcal{V}^1 &= \overline{\tilde{v}_{0,0}^1} P_{0,0} \\ \mathcal{V}^2 &= 0 \end{cases} \quad (4.10)$$



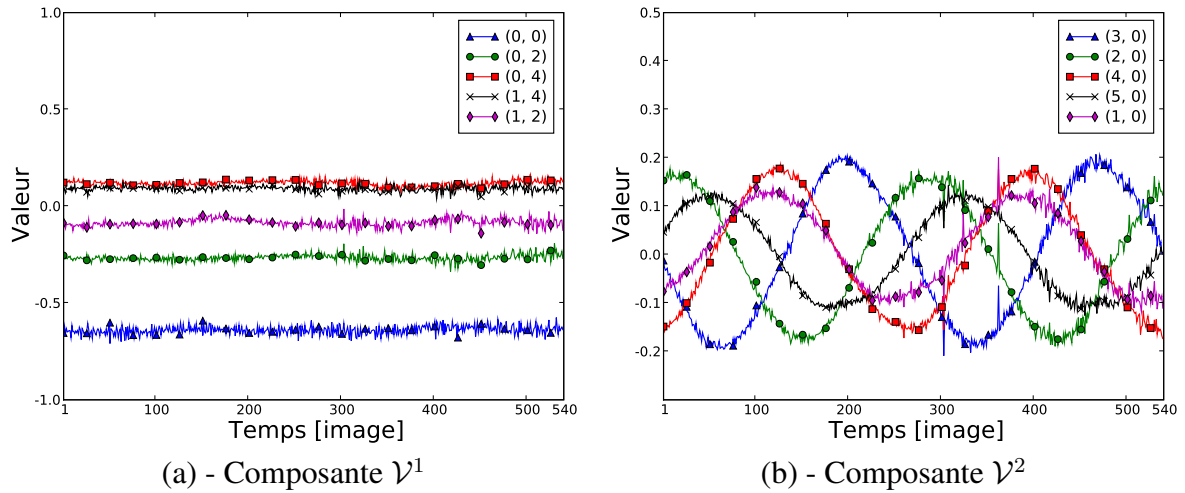


FIGURE 4.21 – Séquence « demi-cylindre » : évolution temporelle des cinq coefficients de projection les plus énergétiques pour (a) - la composante  $\mathcal{V}^1$  et (b) - la composante  $\mathcal{V}^2$ .

et la FIGURE 4.22-(c) représente le champ ayant pour équation analytique :

$$\begin{cases} \mathcal{V}^1 &= \overline{\tilde{v}_{0,2}^1} P_{0,2} \\ \mathcal{V}^2 &= 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Nous constatons alors que le champ obtenu fournit une première approximation du champ

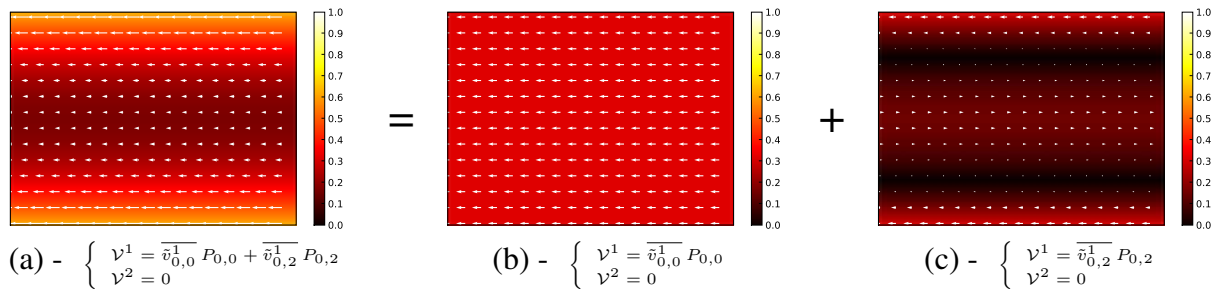


FIGURE 4.22 – Séquence « demi-cylindre » : (a) - représentation du champ de déplacement associé aux moyennes temporelles des deux coefficients les plus énergétiques  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,2}^1$ ; (b) - représentation du champ de déplacement associé à la moyenne temporelle du coefficient  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et (c) - représentation du champ de déplacement associé à la moyenne temporelle du coefficient  $\tilde{v}_{0,2}^1$ . Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

moyen de la séquence, présenté FIGURE 4.13. Pour ce type d'écoulement, ce champ moyen représente essentiellement les déplacements n'évoluant pas dans le temps. Pour cette séquence, ces déplacements sont en grande partie modélisés par les deux coefficients  $\tilde{v}_{0,0}^1$  et  $\tilde{v}_{0,2}^1$ . En étudiant le champ associé au coefficient de projection  $\tilde{v}_{0,0}^1$ , nous retrouvons le champ de déplacement représentant le mouvement rectiligne uniforme orienté de la droite vers la gauche que nous avons déjà eu l'occasion d'étudier précédemment. Ce champ modélise ici l'écoulement uniforme en amont du demi-cylindre. Le champ associé au coefficient de projection  $\tilde{v}_{0,2}^1$  représente quant à lui un mouvement de la droite vers la gauche mais dont la vitesse est plus

importante sur les parties supérieures et inférieures du champ qu'en son milieu. Ce champ permet alors de modéliser un mouvement de forte amplitude au bord des parois et d'amplitude plus faible dans le sillage du demi-cylindre.

Concernant les coefficients associés à la composante  $\mathcal{V}^2$ , nous constatons que l'énergie cinétique est répartie sur un plus grand nombre de coefficients. En effet, 95 % de l'énergie est modélisée par 65 coefficients pour cette deuxième composante contre seulement 17 coefficients pour la composante  $\mathcal{V}^1$ . Cette convergence plus lente pour la composante  $\mathcal{V}^2$  s'explique par le fait que cette séquence ne comporte pas de mouvement vertical important. Une grande partie de l'énergie portée par ces coefficients sert donc à modéliser les différents tourbillons ainsi que leur évolution spatio-temporelle. Ces mouvements étant complexes et de faibles amplitudes, leur modélisation nécessite un plus grand nombre de coefficients. En effectuant une étude fréquentielle, nous constatons que les cinq coefficients les plus énergétiques oscillent selon la même fréquence. Nous retrouvons ici la période de l'échappement tourbillonnaire. En étudiant les portraits de phase entre les trois coefficients de projection les plus énergétiques de la composante  $\mathcal{V}^2$  (cf. FIGURE 4.23), nous retrouvons bien, pour chaque portrait, la forme elliptique caractéristique d'un écoulement périodique.

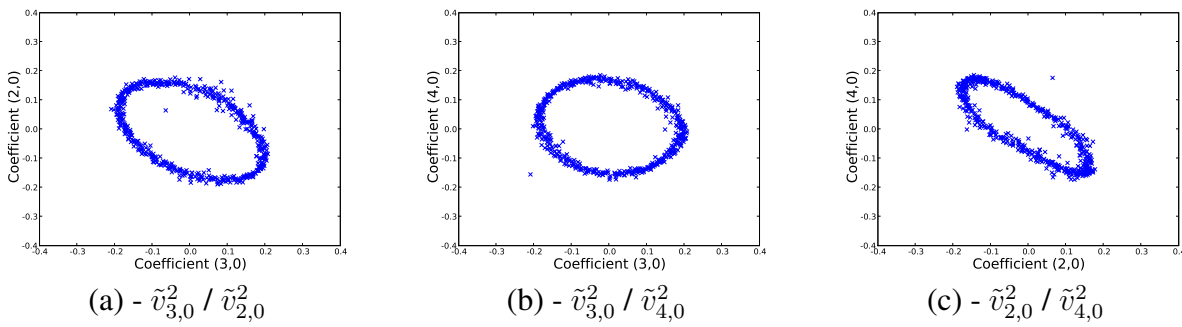


FIGURE 4.23 – Séquence « demi-cylindre » : portraits de phase entre (a) - les coefficients  $\tilde{v}_{3,0}^2$  et  $\tilde{v}_{2,0}^2$ ; (b) - les coefficients  $\tilde{v}_{3,0}^2$  et  $\tilde{v}_{4,0}^2$ ; (c) - les coefficients  $\tilde{v}_{2,0}^2$  et  $\tilde{v}_{4,0}^2$ . La forme circulaire de chaque portrait est caractéristique d'un écoulement périodique.

#### 4.2.4 Temps de calcul et occupation mémoire

Comme pour la séquence précédente, nous étudions maintenant les temps de calcul et l'occupation mémoire de notre méthode pour une modélisation à 99 % de l'énergie cinétique, c'est-à-dire en utilisant une base de degré 22. Les calculs sont effectués sur l'ordinateur présenté au chapitre 3. Les temps obtenus sont les suivants :

- génération d'une base orthonormale de degré 22 : 1.10 s
- calcul des valeurs précalculées : 9.23 s
- projection des 540 champs de la séquence : 5.54 s soit 10.3 ms/champ ce qui correspond à plus de 97 champs/s

L'occupation mémoire est la suivante :

- base orthonormale de degré 22 : 276 polynômes
- valeurs précalculées : 1 664 280 réels
- un champ de la séquence : 12 060 réels

### 4.2.5 Réduction des données

Finalement, nous étudions la capacité de notre modèle à compresser les données. Nous effectuons également une comparaison avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Les résultats obtenus sont présentés TABLEAU 4.6. Nous constatons alors que, pour une modélisation à 95 % de l'énergie cinétique, les taux de compression obtenus avec les deux méthodes sont identiques. Pour une modélisation à 99 % de l'énergie cinétique, les taux de compression restent importants mais notre modèle semble compresser d'avantage l'information. Comme nous l'avons précisé précédemment, le bruit présent dans la séquence semble pénaliser plus fortement la décomposition orthogonale aux valeurs propres que notre méthode.

TABLEAU 4.6 – Séquence « demi-cylindre » : taux de compression obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et notre méthode (MBP). Pour les deux modèles, la quantité d'énergie cinétique modélisée est de 95 % ou de 99 %. La séquence est composée de 540 champs de taille  $90 \times 67$ . Elle est donc représentée par 6 512 400 réels.

Énergie modélisée	POD			MBP		
	modes	réels	taux de compression	degré	réels	taux de compression
95 %	3	37 800	99.42 %	7	38 880	99.40 %
99 %	104	1 310 400	79.88 %	22	298 080	95.42 %

## 4.3 Écoulement en aval d'un cylindre carré

La dernière séquence étudiée représente l'évolution de lâchers tourbillonnaires alternés dans le sillage d'un cylindre carré. Elle est issue des travaux présentés dans [David 06, Kurtulus 07]. Nous étudions ici la zone située en aval du cylindre carré. La topologie de l'écoulement dans cette zone est présentée FIGURE 4.24, pour trois instants différents. Ayant eu l'occasion de participer aux manipulations, nous présentons ici en détail le dispositif expérimental.

L'acquisition est effectuée au sein de la soufflerie Sessiat du LEA qui fonctionne en boucle fermée (cf. FIGURE 4.25). Sa plage de vitesse est comprise entre 1.5 m/s et 30 m/s. Un cylindre carré de 30 mm de côté est placé dans la veine d'essai (cf. FIGURE 4.25). Le fluide utilisé est de l'air dont la vitesse en amont du cylindre est de 2.37 m/s. Le nombre de Reynolds, calculé à partir du diamètre du cylindre est de  $Re = 4900$ . Pour un tel nombre de Reynolds, l'écoulement est dans un régime turbulent fortement instationnaire. Nous étudions cet écoulement pendant un intervalle de temps représentant 10 périodes d'échappements tourbillonnaires. Durant cet intervalle, la séquence peut alors être considérée comme de cycle limite.

L'acquisition est effectuée avec une caméra CMOS Photron-Fastcam dont la fréquence d'acquisition est de 2000 Hz pour une résolution de  $1024 \times 1024$  pixels avec une sensibilité de 8 bits en niveau de gris. L'objectif utilisé est un AF Nikkor de 105 mm permettant d'obtenir un champ de  $145 \times 145 \text{ mm}^2$ . Le laser utilisé pour illuminer la section de mesure est un ND-YLF Quantronix qui possède deux cavités ayant chacune une puissance de 18 mJ par pulse. L'ensemencement de l'écoulement est réalisé grâce à un générateur de fumée. Le diamètre moyen des particules est de  $1 \mu\text{m}$ . Un exemple d'images obtenues avec ce dispositif d'acquisition est présenté FIGURE 4.26.

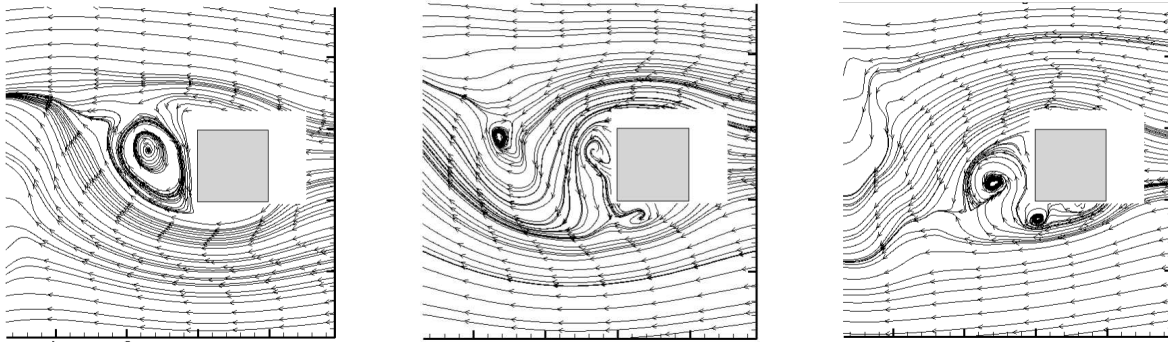
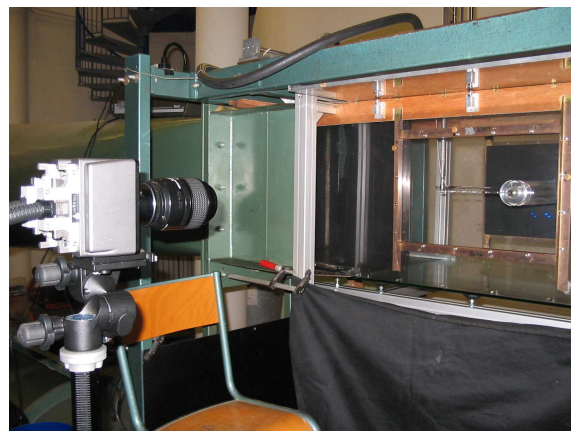


FIGURE 4.24 – Séquence « cylindre-carré » : topologie de l'écoulement à trois instants différents. Le fluide s'écoule de la droite vers la gauche.



(a) - Soufflerie Sessiat du LEA



(b) - Veine d'essai et dispositif d'acquisition

FIGURE 4.25 – Séquence « cylindre-carré » : représentation du dispositif expérimental comprenant (a) - la soufflerie Sessiat du Laboratoire d'Études Aérodynamiques (LEA) de Poitiers et (b) - la veine d'essai et le dispositif d'acquisition.

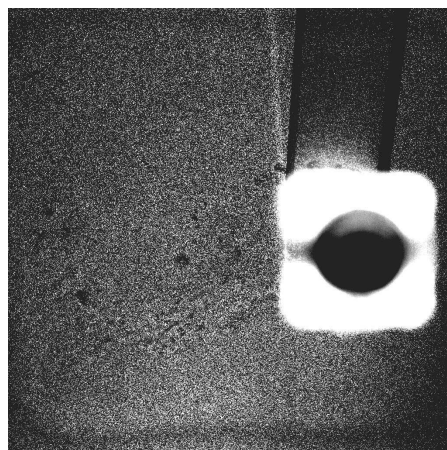


FIGURE 4.26 – Séquence « cylindre-carré » : exemple d'image obtenue avec le dispositif d'acquisition.

Les champs de déplacement sont calculés grâce à une méthode itérative d'inter-corrélation avec fenêtres déformables [Scarano 00, Scarano 02] de  $31 \times 31$  pixels et un taux de recouvrement de 75 %. La résolution de ces champs est de  $124 \times 124$  vecteurs. Afin de réduire les bruits de mesure non corrélés, une approximation en temps sur un polynôme du second ordre par minimisation aux moindres carrés est effectuée sur une fenêtre glissante composée de cinq champs de déplacement. Les données présentées ici sont adimensionnées par rapport à la taille du cylindre carré et à la vitesse en amont de la zone étudiée. La séquence est composée de 976 champs. La FIGURE 4.27 représente trois champs instantanés extraits de cette séquence. La FIGURE 4.28 représente le champ moyen. La FIGURE 4.29 représente les histogrammes de la composante  $\mathcal{V}^1$ , de la composante  $\mathcal{V}^2$  et de la norme, pour l'ensemble des champs de la séquence. En étudiant ces histogrammes, nous constatons qu'il n'y a pas d'effet de blocage de pics : la qualité des mesures et des calculs permettent donc une bonne exploitation de la séquence.

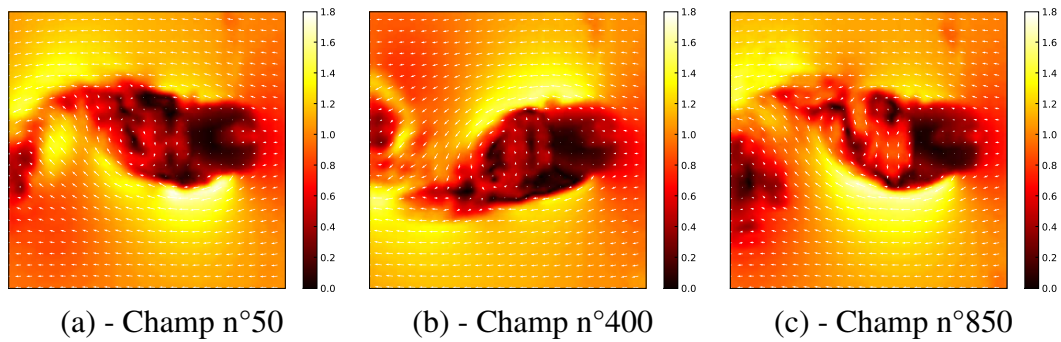


FIGURE 4.27 – Séquence « cylindre-carré » : représentation de trois champs de déplacement instantanés extraits de la séquence. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

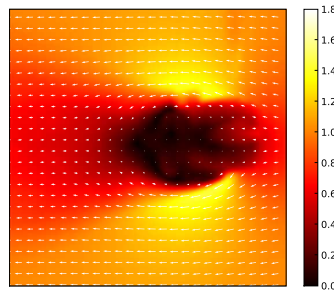


FIGURE 4.28 – Séquence « cylindre-carré » : représentation du champ de déplacement moyen. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

#### 4.3.1 Étude par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD)

Tout d'abord, nous modélisons cette séquence par une décomposition orthogonale aux valeurs propres de type « snapshot » sur l'ensemble des champs instantanés de la séquence. La FIGURE 4.30 représente la contribution de chaque mode ainsi que la contribution cumulée, exprimée en pourcent, en fonction du nombre de modes. Le TABLEAU 4.7 donne la contribution des



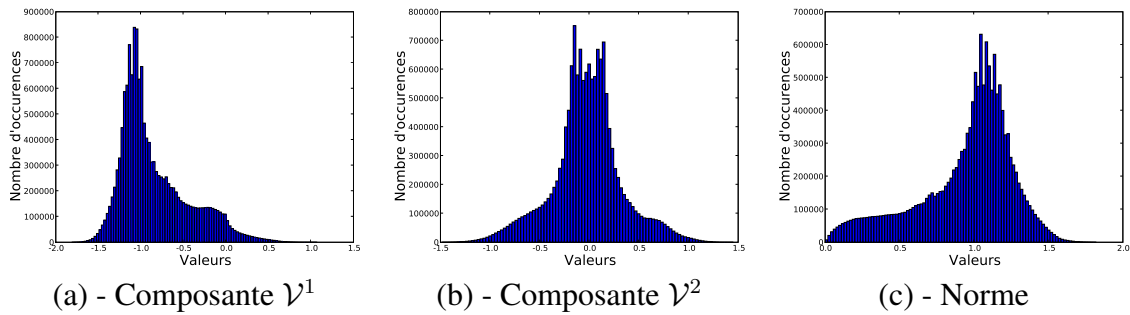


FIGURE 4.29 – Séquence « cylindre-carré » : (a) - histogramme de la composante  $V^1$  ; (b) - histogramme de la composante  $V^2$  ; (c) - histogramme de la norme.

premiers modes. Nous constatons alors que 97 % de l'énergie cinétique est contenue dans les 3 premiers modes et plus de 99 % dans les 19 premiers modes. Comme pour la séquence « demi-cylindre », le premier mode représente principalement le champ moyen de l'écoulement. Il est représenté FIGURE 4.31-(a). Les deuxième et troisième modes, représentés FIGURE 4.31-(b) et FIGURE 4.31-(c), modélisent, quant à eux, les tourbillons qui se forment en aval du cylindre carré. Les structures plus petites dans le sillage du cylindre ou dans les couches de cisaillement n'apparaissent qu'après quelques modes. De nouveau, nous pouvons noter que ces modes spatiaux ne sont jamais visibles dans l'écoulement. Ils sont donc difficiles à interpréter.

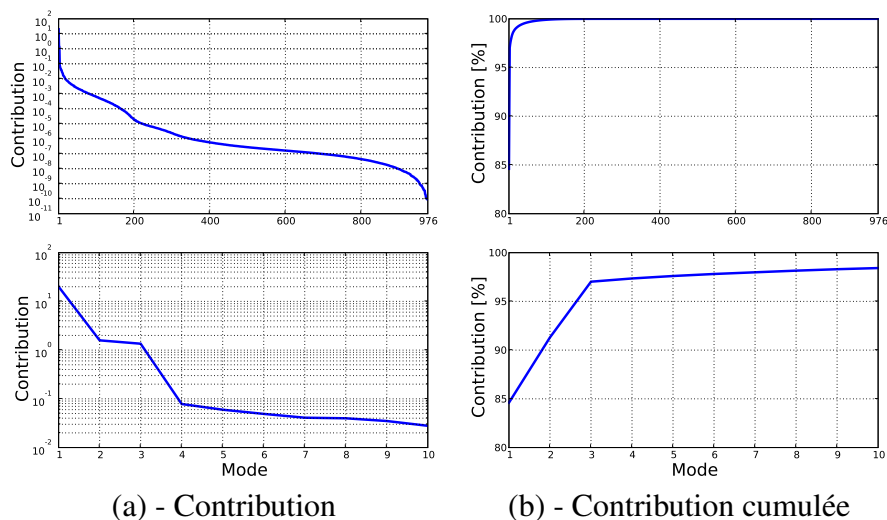


FIGURE 4.30 – Séquence « cylindre-carré » : (a) - contribution de chaque mode POD (en haut) et contribution des 10 premiers modes POD (en bas) ; (b) - contribution cumulée, exprimée en pourcent, en fonction du nombre de modes POD conservés (en haut) et contribution cumulée des 10 premiers modes POD, exprimée en pourcent, en fonction du nombre de modes POD conservés (en bas).

L'étude de l'évolution temporelle des coefficients associés à ces modes, représentée FIGURE 4.32, permet de retrouver le phénomène périodique des lâchers tourbillonnaires. En étudiant le portrait de phase entre les deuxième et troisième coefficients temporels, nous constatons que celui-ci possède une forme circulaire caractéristique des phénomènes de type cycle limite mais la périodicité n'est pas complètement retrouvée, contrairement à l'écoulement précédent. Cela est principalement dû au régime de l'écoulement.

TABLEAU 4.7 – Séquence « cylindre-carré » : contribution et contribution cumulée, exprimées en pourcent, de quelques modes.

Mode	Contribution	Contribution cumulée
1	84.61 %	84.61 %
2	06.70 %	91.30 %
3	05.72 %	97.02 %
4	00.33 %	97.35 %
5	00.25 %	97.61 %
⋮	⋮	⋮
19	00.04 %	99.01 %

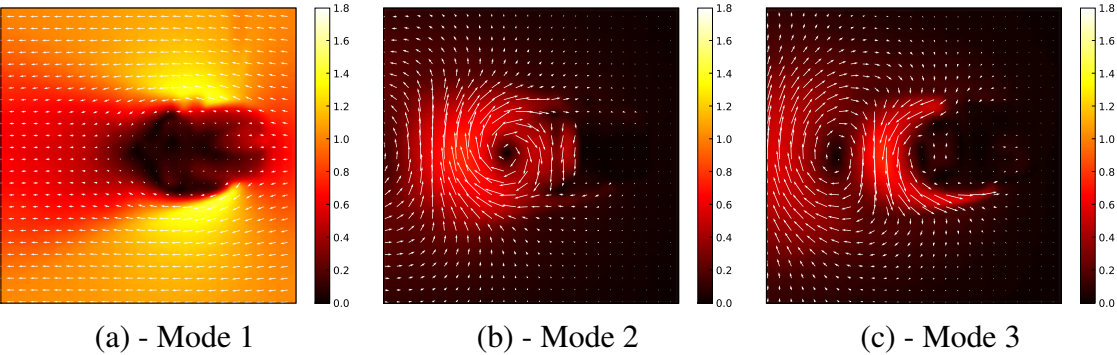


FIGURE 4.31 – Séquence « cylindre-carré » : représentation des trois premiers modes POD. Pour des raisons de lisibilité, seul un vecteur sur cinq est représenté et une carte de norme a été ajoutée. Les mesures données sont sans unité.

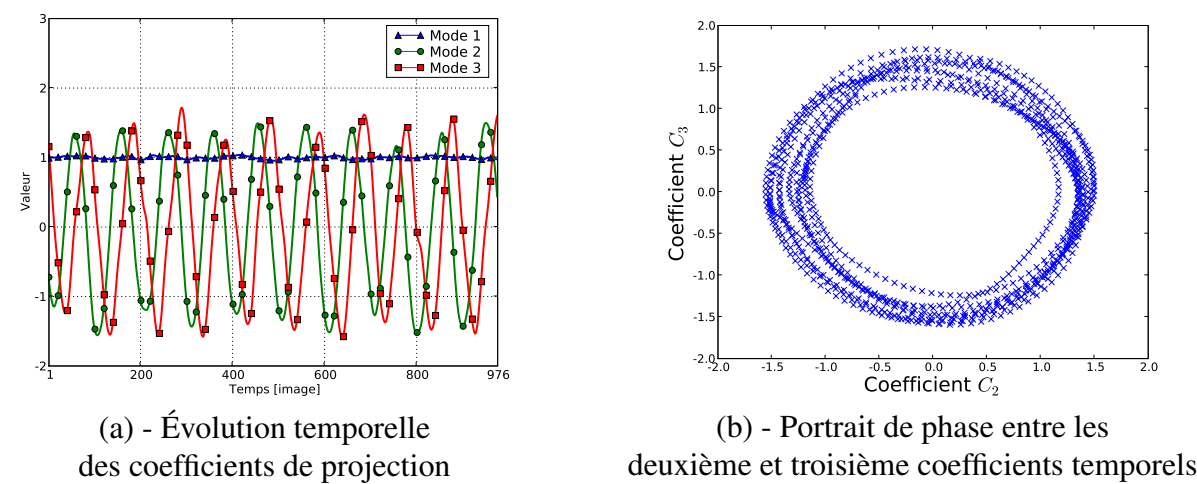


FIGURE 4.32 – Séquence « cylindre-carré » : (a) - évolution temporelle des trois coefficients associés aux trois premiers modes POD ; (b) - portrait de phase entre les deuxième et troisième coefficients temporels POD. La forme circulaire de ce portrait de phase est caractéristique d'un écoulement périodique.

### 4.3.2 Qualité de la modélisation par base de polynômes

Nous étudions maintenant l'évolution de la quantité  $Q$  d'énergie cinétique définie en (4.7) en fonction du degré de la base. Nous faisons varier ce degré entre 0 et 35. La FIGURE 4.33-(a) représente la quantité d'énergie modélisée par notre méthode en fonction du degré de la base. La FIGURE 4.33-(b) représente la quantité d'énergie modélisée par la décomposition orthogonale aux valeurs propres en fonction du nombre de modes conservés. Nous constatons alors que plus de 97 % de l'énergie, c'est-à-dire l'équivalent d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres avec 3 modes, est modélisée en utilisant une base de degré 11 et plus de 99 % de l'énergie, c'est-à-dire l'équivalent d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres avec 19 modes, est modélisée en utilisant une base de degré 20. Comme pour les séquences précédentes, nous constatons que notre méthode permet d'obtenir une modélisation précise du mouvement.

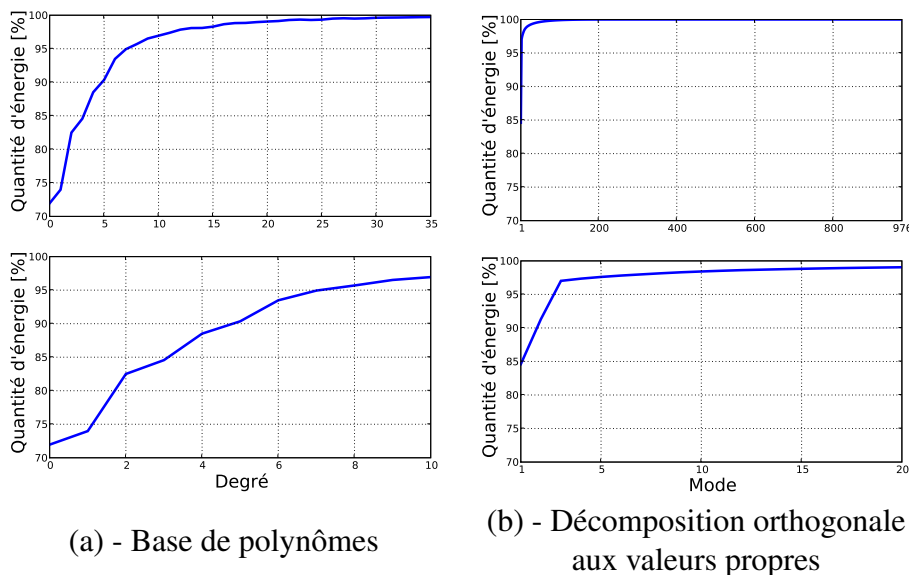


FIGURE 4.33 – Séquence « cylindre-carré » : (a) - quantité d'énergie cinétique modélisée en fonction du degré de la base pour une modélisation par base de polynômes, le degré de la base variant entre 0 et 35 (en haut) et entre 0 et 10 (en bas) ; (b) - quantité d'énergie cinétique modélisée en fonction du nombre de modes pour une modélisation par décomposition orthogonale aux valeurs propres, en conservant entre 1 et 976 modes (en haut) et entre 1 et 20 modes (en bas).

Nous étudions maintenant la quantité d'énergie modélisée pour chaque champ de la séquence. Nous obtenons les résultats présentés FIGURE 4.34. Comme pour la séquence précédente, nous constatons qu'une modélisation par base de polynômes avec une base de degré 11 est plus régulière qu'une décomposition orthogonale aux valeurs propres avec 3 modes, bien que ces deux méthodes modélisent en moyenne la même quantité d'énergie. Ces résultats sont confirmés en étudiant l'écart-type, la valeur minimale et la valeur maximale de la quantité d'énergie modélisée, présentés TABLEAU 4.8. Ce phénomène est moins marqué pour une décomposition orthogonale aux valeurs propres avec 19 modes et une modélisation par base de polynômes en utilisant une base de degré 20.



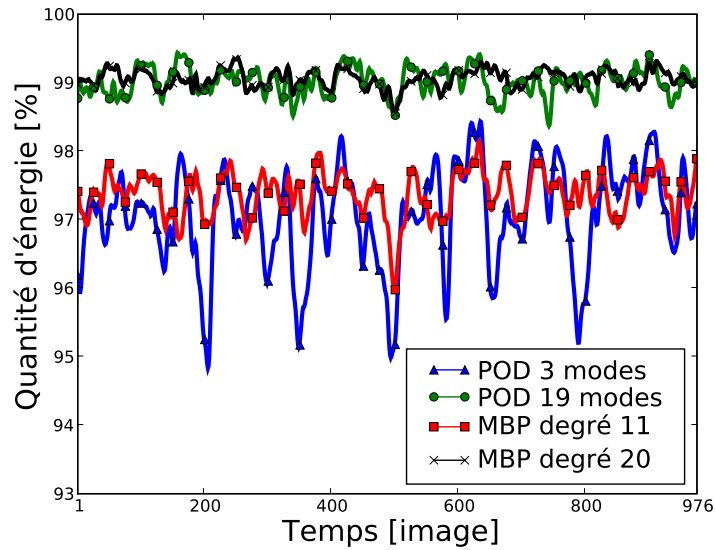


FIGURE 4.34 – Séquence « cylindre-carré » : comparaison de la quantité d'énergie cinétique modélisée pour chaque champ de la séquence par une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et une modélisation par base de polynômes (MBP).

TABLEAU 4.8 – Séquence « cylindre-carré » : moyenne, écart-type, valeur minimale et valeur maximale de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) ou notre méthode (MBP).

Modèle	Moyenne	Écart-type	Minimum	Maximum
POD 3 modes	97.04 %	0.73	94.84 %	98.44 %
MBP degré 11	97.37 %	0.32	95.98 %	98.14 %
POD 19 modes	99.02 %	0.20	98.37 %	99.44 %
MBP degré 20	99.06 %	0.13	98.55 %	99.37 %

### 4.3.3 Étude de l'évolution temporelle des coefficients

Finalement, nous étudions l'évolution temporelle des coefficients après projection sur une base de degré 20, ce qui correspond à une modélisation à 99 % de l'énergie. Pour chaque composante, les cinq coefficients les plus énergétiques sont donnés TABLEAU 4.9. De nouveau, nous constatons que, pour chaque composante, parmi les 231 coefficients issus de cette projection, les coefficients les plus énergétiques sont ceux associés à des polynômes de degrés faibles.

L'évolution temporelle de ces coefficients est donnée FIGURE 4.35. Comme pour la séquence précédente, nous constatons que le coefficient  $\tilde{v}_{0,0}^1$  est beaucoup plus énergétique que tous les autres coefficients. De plus, d'après la FIGURE 4.35-(a), il reste stable au cours du temps. De nouveau, nous en déduisons que le mouvement dominant est un mouvement de translation rectiligne uniforme orienté de la droite vers la gauche et d'amplitude 0.85 unité par image. Ces résultats sont vérifiés en étudiant le champ de déplacement associé au champ moyen de la séquence, présenté FIGURE 4.28.

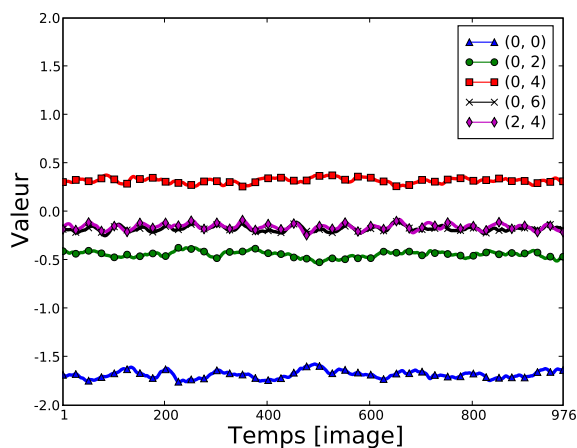
Nous constatons également que les coefficients associés à la composante  $\mathcal{V}^2$  convergent plus lentement à cause de la complexité et de la faible amplitude des mouvements selon cette composante. De plus, en étudiant la FIGURE 4.35-(b), nous constatons que les cinq coefficients les plus énergétiques de la composante  $\mathcal{V}^2$  oscillent tous selon la même fréquence. Une analyse fréquentielle de ces coefficients nous permet de retrouver la période de l'échappement tourbillonnaire. En étudiant les portraits de phase entre les trois coefficients de projection les plus énergétiques de la composante  $\mathcal{V}^2$  (cf. FIGURE 4.36), nous retrouvons bien, pour chaque portrait de phase, la forme elliptique caractéristique d'un écoulement de type cycle limite.

TABLEAU 4.9 – Séquence « cylindre-carré » : énergie et énergie cumulée, exprimées en pourcent, des cinq coefficients les plus énergétiques, pour chaque composante.

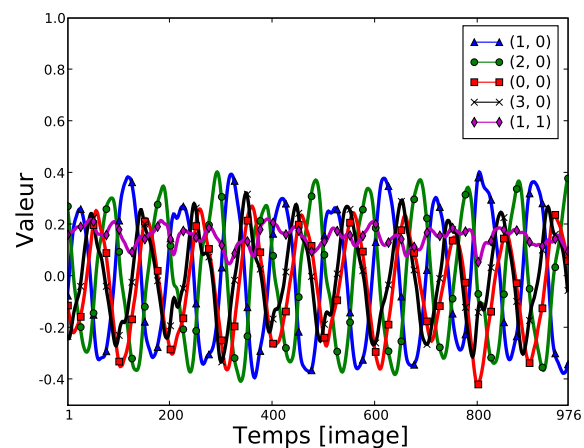
N°	Coefficient	Énergie	Énergie cumulée	N°	Coefficient	Énergie	Énergie cumulée
1	$\tilde{v}_{0,0}^1$	80.95 %	80.95 %	1	$\tilde{v}_{1,0}^2$	13.09 %	13.09 %
2	$\tilde{v}_{0,2}^1$	05.59 %	86.54 %	2	$\tilde{v}_{2,0}^2$	11.97 %	25.06 %
3	$\tilde{v}_{0,4}^1$	02.95 %	89.49 %	3	$\tilde{v}_{0,0}^2$	07.50 %	32.56 %
4	$\tilde{v}_{0,6}^1$	00.91 %	90.41 %	4	$\tilde{v}_{3,0}^2$	05.96 %	38.52 %
5	$\tilde{v}_{2,4}^1$	00.73 %	91.13 %	5	$\tilde{v}_{1,1}^2$	05.03 %	43.55 %
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
33	$\tilde{v}_{4,7}^1$	00.06 %	97.00 %	127	$\tilde{v}_{2,9}^2$	00.04 %	97.01 %

(a) - Composante  $\tilde{\mathcal{V}}^1$

(b) - Composante  $\tilde{\mathcal{V}}^2$



(a) - Composante  $\mathcal{V}^1$



(b) - Composante  $\mathcal{V}^2$

FIGURE 4.35 – Séquence « cylindre-carré » : évolution temporelle des cinq coefficients de projection les plus énergétiques pour (a) - la composante  $\mathcal{V}^1$  et (b) - la composante  $\mathcal{V}^2$ .

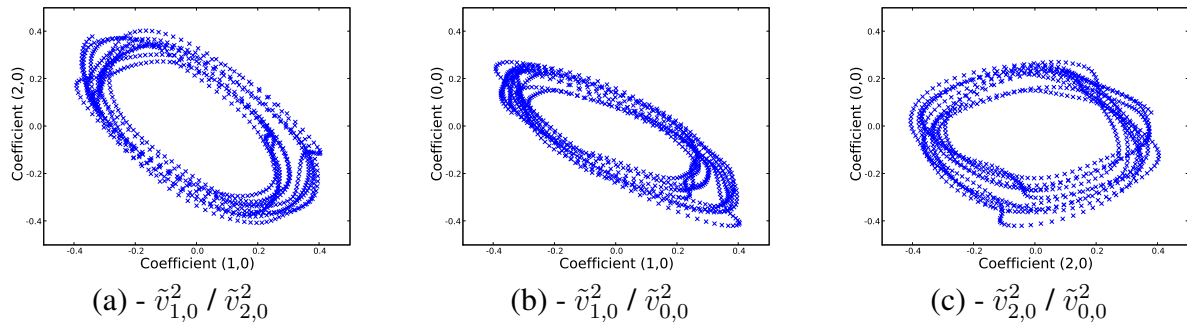


FIGURE 4.36 – Séquence « cylindre-carré » : portraits de phase entre (a) - les coefficients  $\tilde{v}_{1,0}^2$  et  $\tilde{v}_{2,0}^2$ ; (b) - les coefficients  $\tilde{v}_{1,0}^2$  et  $\tilde{v}_{0,0}^2$ ; (c) - les coefficients  $\tilde{v}_{2,0}^2$  et  $\tilde{v}_{0,0}^2$ . La forme circulaire de chaque portrait de phase est caractéristique d'un écoulement périodique.

#### 4.3.4 Temps de calcul et occupation mémoire

Comme pour les séquences précédentes, nous étudions maintenant les temps de calcul et l'occupation mémoire de notre méthode pour une modélisation à 99 % de l'énergie cinétique, c'est-à-dire en utilisant une base de degré 20. Les calculs sont effectués sur l'ordinateur présenté au chapitre 3. Les temps obtenus sont les suivants :

- génération d'une base orthonormale de degré 20 : 653 ms
- calcul des valeurs précalculées : 17.5 s
- projection des 976 champs de la séquence : 18.45 s soit 18.9 ms/champ (=52 champs/s)

L'occupation mémoire est la suivante :

- base orthonormale de degré 20 : 231 polynômes
- valeurs précalculées : 3 890 128 réels
- un champ de la séquence : 32 768 réels

#### 4.3.5 Réduction des données

Finalement, nous étudions la capacité de notre modèle à compresser les données. Nous effectuons également une comparaison avec la décomposition orthogonale aux valeurs propres. Les résultats obtenus sont présentés TABLEAU 4.10. Nous constatons alors que les taux de compression restent sensiblement identiques.

TABLEAU 4.10 – Séquence « cylindre-carré » : taux de compression obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et notre méthode (MBP). Pour les deux modèles, la quantité d'énergie cinétique modélisée est de 97 % (en haut) ou de 99 % (en bas). La séquence est composée de 976 champs de taille  $124 \times 124$ . Elle est donc représentée par 15 006 976 réels.

Énergie modélisée	POD			MBP		
	modes	réels	taux de compression	degré	réels	taux de compression
97 %	3	95 184	99.37 %	11	152 256	98.99 %
99 %	19	602 832	95.98 %	20	450 912	97.00 %

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé le comportement de notre méthode sur trois séquences expérimentales représentant des mouvements fluides complexes. La première séquence représente un écoulement de Couette au sein d'une cavité rigide. Les deux autres séquences représentent un écoulement en aval d'un demi-cylindre pour un nombre de Reynolds faible et un écoulement en aval d'un cylindre carré pour un nombre de Reynolds modéré.

Tout d'abord, nous avons modélisé la première séquence en utilisant une base de polynômes de degré faible. Nous avons alors constaté que le mouvement modélisé correspond au mouvement dominant de la séquence. En étudiant la valeur des quelques coefficients issus de cette modélisation, nous avons alors interprété physiquement ce mouvement dominant.

Ensuite, nous avons mesuré, pour chaque séquence, la qualité de notre modèle. Pour cela, nous avons étudié la quantité d'énergie cinétique modélisée et nous avons comparé les résultats obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres. Nous avons alors constaté que notre méthode est capable de modéliser plus de 99 % de l'énergie cinétique des séquences présentées dans ce chapitre en utilisant des degrés de l'ordre de 20.

Nous avons aussi étudié l'évolution temporelle des coefficients de projection les plus énergétiques. Nous avons alors constaté qu'une grande quantité de l'énergie est portée par quelques coefficients seulement et que ces coefficients sont associés à des polynômes d'ordre faible. De plus, nous avons remarqué qu'il est possible d'extraire certaines caractéristiques de l'écoulement telle que sa période, en étudiant la fréquence d'oscillation de ces coefficients.

Nous avons également montré que la simplicité et l'aspect séquentiel de notre méthode permet d'obtenir des temps de calcul réduits en utilisant une quantité d'espace mémoire limitée.

Finalement, nous avons remarqué que les taux de compression de notre méthode et d'une décomposition orthogonale aux valeurs propres sont relativement similaires et importants. Toutefois ces taux sont légèrement supérieurs avec notre méthode dans le cas de séquences bruitées.

Notre modèle permet donc d'obtenir une modélisation précise d'un écoulement complexe. À partir des coefficients de projection, nous pouvons alors calculer directement des grandeurs telles que les gradients de vitesse et l'accélération pour en déduire la pression en vérifiant les équations de Navier-Stokes. Nous souhaitons également intégrer notre modèle dans des systèmes dynamiques. Pour cela, nous proposons d'étendre la modélisation spatiale effectuée dans ce chapitre à une modélisation spatio-temporelle. Ce nouveau modèle permettrait alors de faire de la prédiction ou de la simulation d'écoulement. Ce sujet fait l'objet du prochain chapitre.

---

## CHAPITRE 5

---

# MODÉLISATION SPATIO-TEMPORELLE

---

Dans ce chapitre, nous proposons d'effectuer une modélisation spatio-temporelle des champs de déplacement. Pour cela, nous définissons deux nouveaux modèles : un modèle tridimensionnel et un modèle composé d'une approche spatiale bidimensionnelle suivie d'une approche temporelle monodimensionnelle. Nous évaluons alors la qualité de ces deux modèles ainsi que les temps de calcul, l'occupation mémoire et les taux de compression associés. Pour terminer notre étude, nous analysons l'influence de la résolution temporelle de la séquence sur la qualité des résultats.

### 5.1 Modélisation par bases de polynômes 3D

Tout d'abord, nous proposons d'effectuer une modélisation tridimensionnelle des champs de déplacement qui composent la séquence. Pour cela, nous considérons la composante temporelle comme une troisième variable, notée  $x_3$ , au même titre que les composantes spatiales  $x_1$  et  $x_2$ . L'ensemble de la séquence est donc représentée par un seul champ tridimensionnel à deux composantes. La taille de ce champ est notée  $S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3}$ . À partir de l'équation (2.41), nous générons une base tridimensionnelle. D'après l'équation (2.42), le nombre de polynômes qui constitue cette base tridimensionnelle de degré  $D$  est :

$$n_{D_3} = \frac{(D+1)(D+2)(D+3)}{6} \quad (5.1)$$

Nous projetons alors le champ tridimensionnel sur cette base afin de déterminer les coefficients de projection. À partir de ces coefficients, nous calculons l'expression analytique du mouvement étudié. Cette expression est de la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}^1(x_1, x_2, x_3) = \tilde{v}_{0,0,0}^1 P_{0,0,0} + \tilde{v}_{0,0,1}^1 P_{0,0,1} + \tilde{v}_{0,1,0}^1 P_{0,1,0} + \tilde{v}_{1,0,0}^1 P_{1,0,0} + \dots \\ \tilde{\mathcal{V}}^2(x_1, x_2, x_3) = \tilde{v}_{0,0,0}^2 P_{0,0,0} + \tilde{v}_{0,0,1}^2 P_{0,0,1} + \tilde{v}_{0,1,0}^2 P_{0,1,0} + \tilde{v}_{1,0,0}^2 P_{1,0,0} + \dots \end{cases} \quad (5.2)$$

Le processus complet de la modélisation tridimensionnelle d'une séquence est représenté FIGURE 5.1.

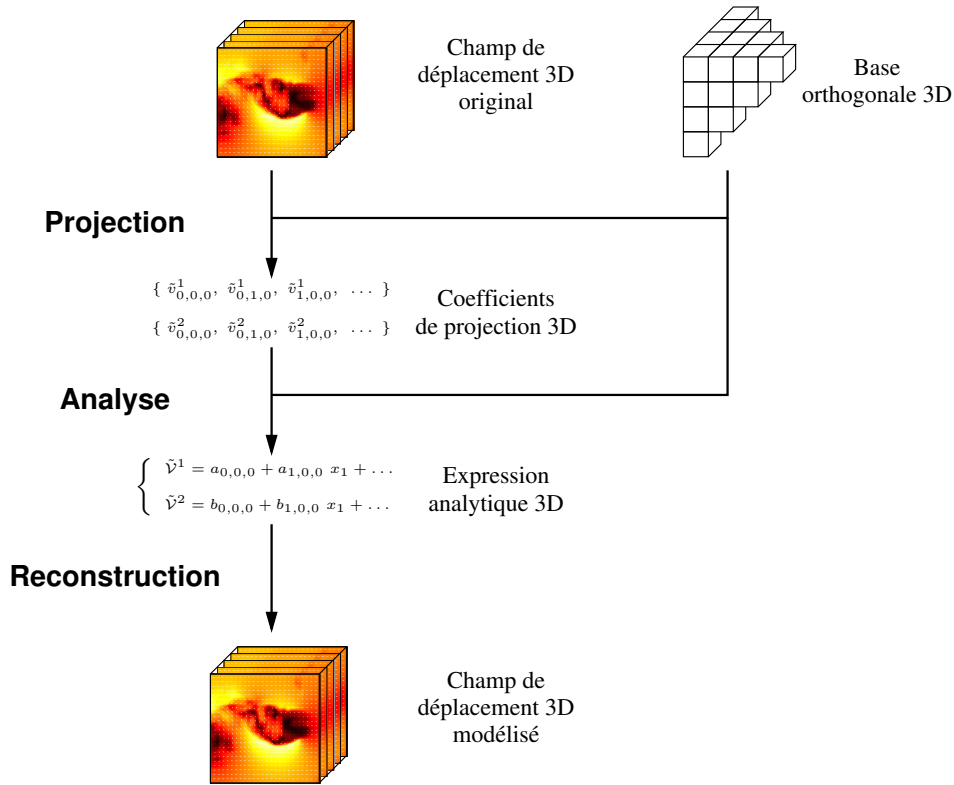


FIGURE 5.1 – Représentation du processus de modélisation tridimensionnelle.

TABLEAU 5.1 – Complexité des différentes opérations pour la modélisation d'un champ tridimensionnel à deux composantes.

Génération de la base	$\Theta(n_D \times (P_+^3 + 2 P_*^3 + P_s^3 + P_m^3))$
Approximation de la séquence Méthode directe	$\Theta(n_C \times n_D \times (P_m^3 + S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3} \times 2 \times (P_m^3 + P_I^3)))$
Approximation de la séquence Méthode optimisée	$\Theta(n_D \times (P_m^3 + S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3} \times P_I^3))$ $+ (n_C \times n_D \times S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3} \times 2 \times P_m^3)$
Reconstruction	$\Theta(n_c \times n_D \times 2 \times (P_*^3 + P_a^3) + S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3} \times 2 \times P_E^3)$

À partir du TABLEAU 2.2 et du TABLEAU 2.3, nous déduisons la complexité et l'occupation mémoire de ce modèle 3D. Elles sont présentées TABLEAU 5.1 et TABLEAU 5.2.

Le taux de compression de ce modèle, déterminé à partir de l'équation (2.44), est calculé de la façon suivante :

$$\tau[\%] = \left( 1 - \frac{n_{D_3}}{S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3}} \right) \times 100 \quad (5.3)$$

TABLEAU 5.2 – Occupation mémoire des différentes opérations pour la modélisation d'un champ tridimensionnel à deux composantes.

Génération de la base	$\sum_{d=0}^D \frac{(d+1)(d+2)}{2} M^d$ réels
Approximation de la séquence Méthode directe	$\sum_{d=0}^D \frac{(d+1)(d+2)}{2} M^d + S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3} \times 2$ réels
Approximation de la séquence Méthode optimisée	$\sum_{d=0}^D \frac{(d+1)(d+2)}{2} M^d + S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3} \times 2$ $+ n_D \times S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3}$ réels
Reconstruction	$\sum_{d=0}^D \frac{(d+1)(d+2)}{2} M^d$ réels

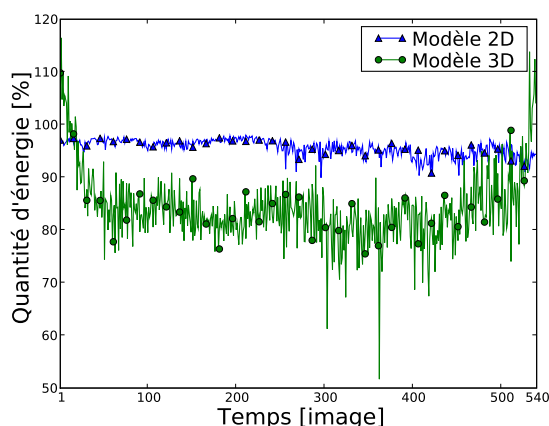
avec  $n_{D_3}$  le nombre de polynômes de la base tridimensionnelle et  $S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3}$  la taille du champ selon les trois dimensions.

Nous étudions ici la qualité de ce modèle 3D sur les séquences « demi-cylindre » et « cylindre-carré » présentées au chapitre précédent.

### 5.1.1 Qualité de la modélisation pour la séquence « demi-cylindre »

Nous avons vu au chapitre précédent que 95 % de l'énergie cinétique de la séquence « demi-cylindre » est modélisée en utilisant une base de polynômes bidimensionnelle de degré 7. Nous décidons donc de projeter cette séquence sur une base tridimensionnelle de degré identique. Nous obtenons alors 120 coefficients de projection par composante. À partir de ces coefficients, nous reconstruisons la séquence et nous la comparons avec la séquence originale en utilisant l'erreur de modélisation présentée en (4.7). La FIGURE 5.2 présente, pour chaque champ, l'erreur de modélisation obtenue en utilisant ce modèle 3D. Nous représentons également l'erreur obtenue avec le modèle 2D présenté au chapitre précédent (cf. FIGURE 4.20). Nous constatons alors que l'erreur associée au modèle 3D est, en moyenne, plus importante que l'erreur associée au modèle 2D. Nous pouvons également noter une forte dégradation des résultats sur les champs situés au début ou à la fin de la séquence. La FIGURE 5.18 présente quatre champs de déplacement, dont le premier et le dernier champs de la séquence, modélisés avec des modèles 2D et 3D. Nous constatons que les champs issus d'une modélisation tridimensionnelle sont extrêmement lissés. Contrairement au modèle 2D, ce modèle 3D ne permet pas de modéliser les grosses structures de l'écoulement. La projection de cette séquence sur une base tridimensionnelle de degré 7 ne permet donc pas d'obtenir une qualité de modélisation suffisante pour être exploitable.

En étudiant la FIGURE 5.2, nous pouvons remarquer la présence de deux pics indiquant une erreur de modélisation tridimensionnelle importante pour les champs 304 et 363. Ces deux champs, ainsi que les champs précédents et les champs suivants sont représentés FIGURE 5.3. Nous constatons alors que ces champs sont fortement bruités. En effet, la plus grande partie



	Modèle 2D	Modèle 3D
Moyenne	95.67 %	84.12 %
Écart-type	1.51	6.80
Minimum	89.91 %	51.67 %
Maximum	97.98 %	116.47 %

FIGURE 5.2 – Séquence « demi-cylindre » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant un modèle 2D ou un modèle 3D, pour chaque champ de la séquence. Les deux bases utilisées sont de degré 7.

de l'énergie cinétique de ces deux champs est concentrée dans le coin supérieur droit et ne représente aucun phénomène physique réel. La modélisation de ces deux champs avec une base tridimensionnelle de degré 7 lisse donc fortement cette zone de forte énergie. L'écart entre ces deux champs modélisés et les champs originaux est donc plus important qu'avec les autres champs mais n'est pas uniquement dû au modèle.

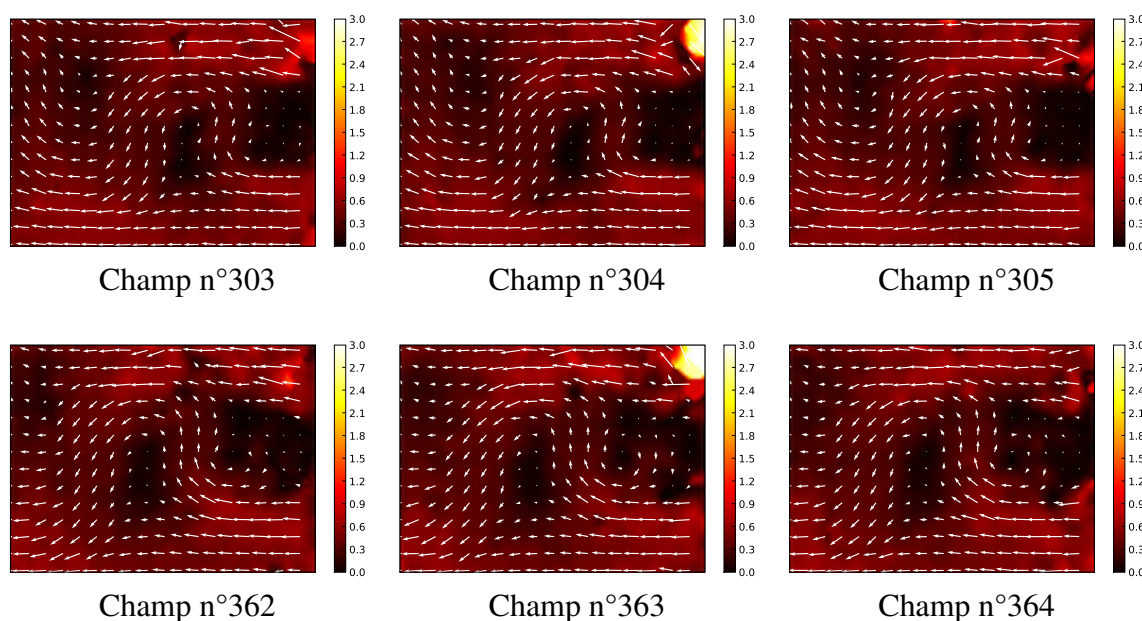
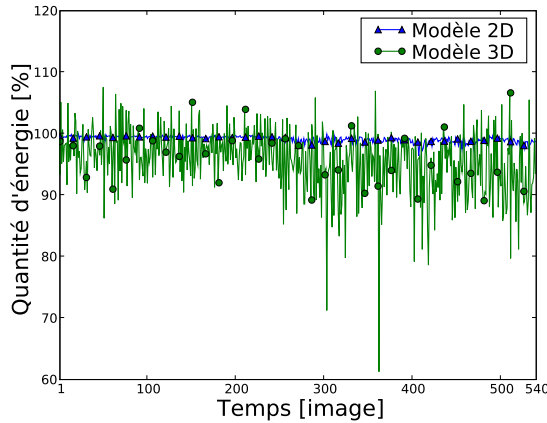


FIGURE 5.3 – Séquence « demi-cylindre » : représentation des champs 304 et 363, ainsi que les champs précédents et les champs suivants. Pour des raisons de lisibilité, une carte de couleur représentant la norme de chaque vecteur a été ajoutée et seul un vecteur sur cinq est affiché.

Pour essayer d'améliorer la qualité des résultats, nous décidons de projeter cette séquence sur une base tridimensionnelle de degré 22 qui, dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle, permet de représenter 99 % de l'énergie cinétique. Pour chaque champ, l'erreur de modélisation obtenue est présentée FIGURE 5.4. Nous représentons également l'erreur obtenue



avec le modèle 2D présenté au chapitre précédent (cf. FIGURE 4.20). La FIGURE 5.19 présente quatre champs de déplacement, dont le premier et le dernier champs de la séquence, modélisés avec les modèles 2D et 3D. Nous constatons alors que la quantité d'énergie modélisée par un



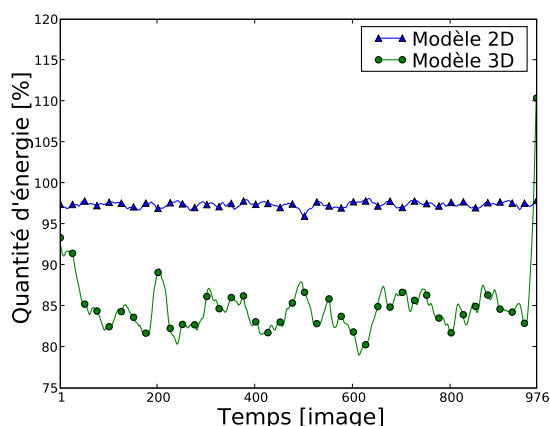
	Modèle 2D	Modèle 3D
Moyenne	99.14 %	95.59 %
Écart-type	0.48	5.12
Minimum	96.41 %	61.27 %
Maximum	99.93 %	107.58 %

FIGURE 5.4 – Séquence « demi-cylindre » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant un modèle 2D ou un modèle 3D, pour chaque champ de la séquence. Les deux bases utilisées sont de degré 22.

modèle 3D et une base de degré 22 est plus importante que la quantité d'énergie modélisée par un modèle 3D et une base de degré 7. Nous pouvons également remarquer que les erreurs de modélisation des champs situés au début ou à la fin de la séquence sont maintenant limitées. Par contre, l'erreur associée à ce modèle 3D reste, en moyenne, sensiblement plus grande que celle associée au modèle 2D. Nous souhaitons toutefois préciser que nous comparons ici le modèle 2D et le modèle 3D avec la séquence originale qui, comme nous l'avons déjà précisé, est bruitée. Comme le modèle 3D lisse les champs de déplacement de façon plus importante que le modèle 2D, l'écart entre la séquence originale et la séquence reconstruite avec ce modèle 3D est plus important que l'écart entre la séquence originale et la séquence reconstruite avec le modèle 2D. Mais cet écart ne traduit pas nécessairement une moins bonne qualité du modèle 3D pour représenter les phénomènes physiques réels. Cela se vérifie en étudiant les champs reconstruits, représentés FIGURE 5.19. Nous constatons alors qu'une modélisation tridimensionnelle avec une base de degré 22 permet de modéliser les grosses structures de l'écoulement. De plus, nous pouvons remarquer que ce modèle permet de régulariser les vecteurs incohérents situés en haut à droite des champs de déplacement. En effet, ces vecteurs sont issus d'une mauvaise mesure de corrélation lors de la phase d'extraction et ne représentent aucun phénomène physique réel.

### 5.1.2 Qualité de la modélisation pour la séquence « cylindre-carré »

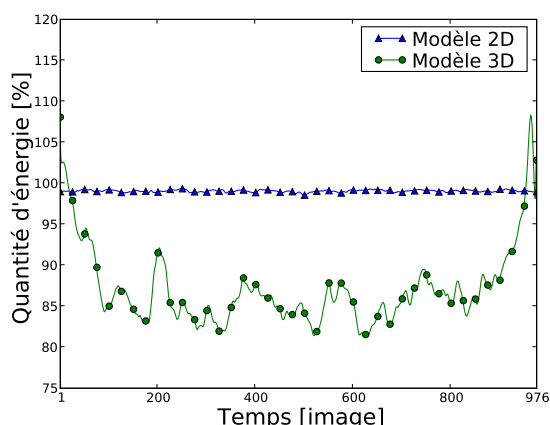
Nous appliquons maintenant le même processus à la séquence « cylindre-carré ». La FIGURE 5.5 présente, pour chaque champ, l'erreur de modélisation obtenue en utilisant une base de degré 11 qui, dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle, représente 97 % de l'énergie cinétique. La FIGURE 5.20 présente quatre champs de déplacement, dont le premier et le dernier champs de la séquence, modélisés avec les modèles 2D et 3D. Comme pour la séquence « demi-cylindre », nous constatons que l'erreur associée au modèle 3D est importante et que les grosses structures de l'écoulement ne sont pas modélisées. L'utilisation d'une base tridimensionnelle de degré 11 ne permet donc pas d'obtenir une représentation correcte de la séquence.



	Modèle 2D	Modèle 3D
Moyenne	97.37 %	84.66 %
Écart-type	0.32	2.85
Minimum	95.98 %	79.02 %
Maximum	98.14 %	110.39 %

FIGURE 5.5 – Séquence « cylindre-carré » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant un modèle 2D ou un modèle 3D, pour chaque champ de la séquence. Les deux bases utilisées sont de degré 11.

Nous projetons maintenant cette séquence sur une base tridimensionnelle de degré 20 qui, dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle, représente 99 % de l'énergie cinétique. L'erreur de modélisation obtenue pour chaque champ en utilisant un modèle 2D ou un modèle 3D est présentée FIGURE 5.6. Nous constatons alors que l'erreur associée au modèle 3D reste im-



	Modèle 2D	Modèle 3D
Moyenne	99.06 %	87.10 %
Écart-type	0.13	4.73
Minimum	98.55 %	81.36 %
Maximum	99.37 %	108.28 %

FIGURE 5.6 – Séquence « cylindre-carré » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant un modèle 2D ou un modèle 3D, pour chaque champ de la séquence. Les deux bases utilisées sont de degré 20.

portante. En étudiant les champs reconstruits, représentés FIGURE 5.21, nous constatons alors que les grosses structures ne sont toujours pas correctement modélisées. Il semble alors nécessaire d'utiliser une base tridimensionnelle de degré supérieur pour obtenir une représentation exploitable de la séquence.

### 5.1.3 Temps de calcul et occupation mémoire

Nous avons présenté au chapitre 3 une méthode permettant de calculer rapidement la projection d'une série de champs de déplacement sur une base de polynômes. Pour cela, nous

précalculons la valeur des intégrales de l'ensemble des polynômes de la base, en tout point du champ de déplacement. Ce précalcul génère alors  $S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3} \times n_D$  réels avec  $S_{i_1} \times S_{i_2} \times S_{i_3}$  la résolution du champ de déplacement selon chaque dimension et  $n_D$  le nombre de polynômes de la base. Dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle, cela correspond environ à 7,5 milliards de réels pour la projection de la séquence « demi-cylindre » sur une base de degré 22 et 26,6 milliards de réels pour la projection de la séquence « cylindre-carré » sur une base de degré 20, c'est-à-dire des fichiers de plusieurs dizaines voire centaines de giga-octets. De plus, le nombre de valeurs précalculées devient dépendant de la durée de la séquence et non plus uniquement de la résolution des champs et du degré de la base. Lors de l'ajout d'un nouveau champ dans la séquence, l'ensemble des valeurs doit alors être recalculé. L'utilisation de cette « méthode optimisée » n'est donc pas envisageable dans notre cas. Pour chaque séquence, nous utilisons alors la « méthode directe ». Dans ce cas, les temps de calcul sont d'environ quatre heures pour la séquence « demi-cylindre » et neuf heures pour la séquence « cylindre-carré ».

#### 5.1.4 Réduction des données

Nous comparons maintenant les taux de compression obtenus en utilisant un modèle 3D avec ceux obtenus en utilisant un modèle 2D. Ces taux sont résumés dans le TABLEAU 5.3. Dans ce tableau, les modèles barrés sont considérés comme inexploitable car ils ne permettent pas d'obtenir une qualité de modélisation suffisante. Nous constatons alors que ce modèle 3D fournit des taux de compression extrêmement importants.

TABLEAU 5.3 – *Taux de compression obtenus avec un modèle 2D et un modèle 3D en fonction du degré de la base, pour les séquences « demi-cylindre » et « cylindre-carré ». Les modèles barrés sont considérés comme inexploitable car ils ne permettent pas d'obtenir une qualité de modélisation suffisante.*

Séquence	degré	Modèle 2D		Modèle 3D	
		réels	taux de compression	réels	taux de compression
« demi-cylindre »	7	38 880	99.40 %	240	99.99 %
6 512 400 réels	22	298 080	95.42 %	4 600	99.93 %
« cylindre-carré »	11	152 256	98.99 %	728	99.99 %
15 006 976 réels	20	450 912	97.00 %	3 542	99.97 %

#### 5.1.5 Conclusion

Nous venons de proposer une modélisation tridimensionnelle des séquences « demi-cylindre » et « cylindre-carré » présentées au chapitre précédent. Concernant la séquence « demi-cylindre », nous avons vu que sa projection sur une base tridimensionnelle de degré 22 permet d'obtenir une erreur de modélisation faible. De plus, le lissage engendré par ce modèle 3D permet d'éliminer une certaine quantité de bruit tout en préservant les grosses structures. Par contre, une base tridimensionnelle de degré 20 n'est pas suffisante pour modéliser correctement la séquence « cylindre-carré ». Pour obtenir de meilleurs résultats, il serait alors nécessaire d'utiliser des bases de degrés plus élevés. Mais les temps de calcul engendrés par ce modèle ne

permettent pas d'envisager son utilisation dans des systèmes dynamiques ou des applications temps-réels.

## 5.2 Modélisation 2D + 1D

Dans le but d'améliorer la qualité de la modélisation tout en gardant des temps de calcul faibles et une occupation mémoire réduite, nous proposons ici une seconde approche. Celle-ci est composée de deux étapes. La première étape consiste à effectuer une modélisation spatiale de chaque champ de la séquence en le projetant sur une base bidimensionnelle. Ce processus a été détaillé dans les chapitres précédents. La seconde étape a pour but de modéliser l'évolution temporelle des coefficients de projection obtenus lors de la première étape en les projetant sur une base de polynômes monodimensionnelle. Au final, ce modèle permet d'obtenir un ensemble de fonctions polynomiales monodimensionnelles représentant l'évolution temporelle des coefficients issus de la projection des champs de déplacement sur une base bidimensionnelle. Le processus général d'une telle modélisation est présenté FIGURE 5.7.

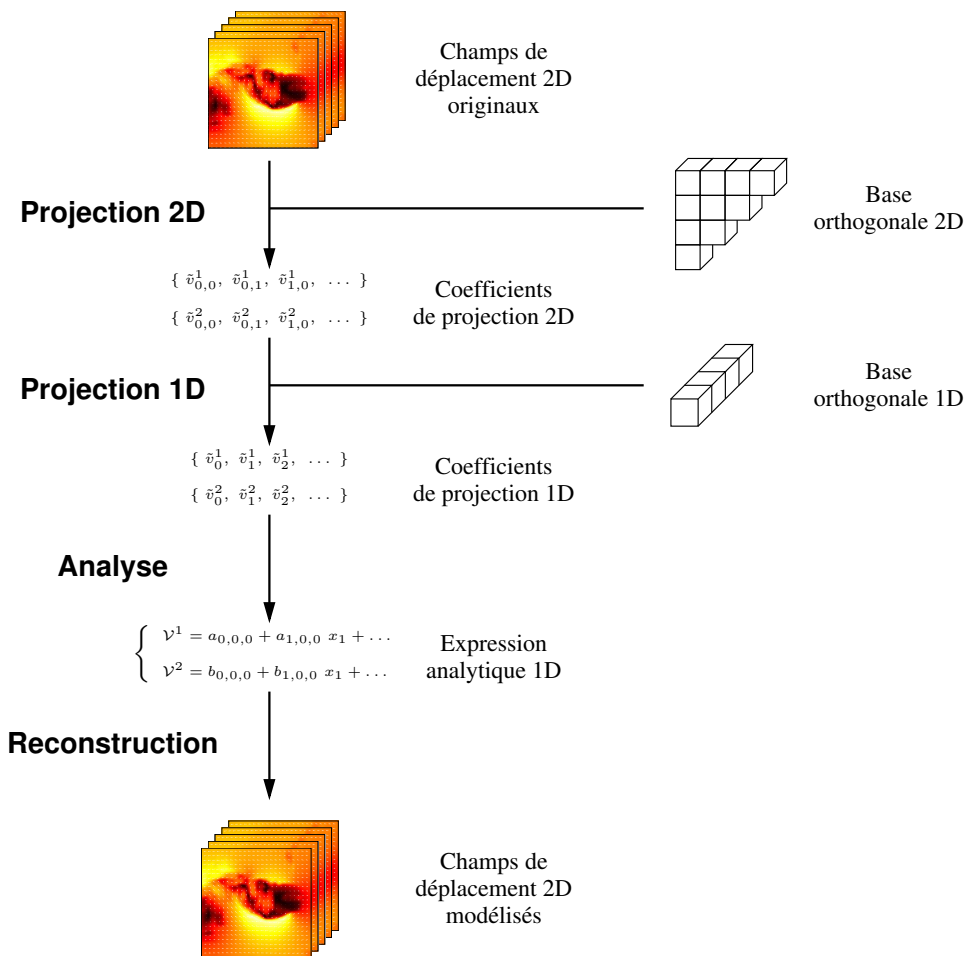


FIGURE 5.7 – Représentation du processus permettant de modéliser une séquence par un modèle 2D+1D.

D'après l'équation (2.42), nous pouvons calculer le nombre  $n_{D_1}$  de polynômes qui constituent la base monodimensionnelle de degré  $D_1$  et le nombre  $n_{D_2}$  de polynômes qui constituent la base bidimensionnelle de degré  $D_2$ . Nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} n_{D_1} &= D_1 + 1 \\ n_{D_2} &= \frac{(D_2 + 1)(D_2 + 2)}{2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

La complexité et l'occupation mémoire de ce modèle peuvent être déduites des TABLEAU 2.2 et TABLEAU 2.3. Elles sont présentées TABLEAU 5.4 et TABLEAU 5.5.

TABLEAU 5.4 – Complexité des différentes opérations nécessaires à la modélisation d'un champ de déplacement en utilisant le modèle 2D+1D.

Génération de la base	$\Theta(n_{D_2} \times (P_+^2 + 2 P_*^2 + P_s^2 + P_m^2) + n_{D_1} \times (P_+^1 + 2 P_*^1 + P_s^1 + P_m^1))$
Approximation de la séquence Méthode directe	$\Theta(n_C \times n_{D_2} \times (P_m^2 + S_{i_1} \times S_{i_2} \times 2 \times (P_m^2 + P_I^2)) + n_C \times n_{D_1} \times (P_m^1 + n_{D_2} \times 2 \times (P_m^1 + P_I^1)))$
Approximation de la séquence Méthode optimisée	$\Theta(n_{D_2} \times (P_m^2 + S_{i_1} \times S_{i_2} \times P_I^2) + (n_C \times n_{D_2} \times S_{i_1} \times S_{i_2} \times 2 \times P_m^2) + n_{D_1} \times (P_m^1 + n_{D_2} \times P_I^1) + (n_C \times n_{D_1} \times n_{D_2} \times 2 \times P_m^1))$
Reconstruction	$\Theta(n_c \times n_{D_2} \times 2 \times (P_*^2 + P_a^2) + S_{i_1} \times S_{i_2} \times 2 \times P_E^2 + n_c \times n_{D_1} \times 2 \times (P_*^1 + P_a^1) + n_{D_2} \times 2 \times P_E^1)$

TABLEAU 5.5 – Occupation mémoire des différentes opérations nécessaires à la modélisation d'un champ de déplacement en utilisant le modèle 2D+1D.

Génération de la base	$\sum_{d=0}^{D_2} \frac{(d+1)(d+2)}{2} M^d + \sum_{d=0}^{D_1} M^d$ réels
Approximation de la séquence Méthode directe	$\sum_{d=0}^{D_2} \frac{(d+1)(d+2)}{2} M^d + S_{i_1} \times S_{i_2} \times 2 + \sum_{d=0}^{D_1} M^d + n_{D_2} \times 2$ réels
Approximation de la séquence Méthode optimisée	$\sum_{d=0}^{D_2} \frac{(d+1)(d+2)}{2} M^d + S_{i_1} \times S_{i_2} \times 2 + n_{D_2} \times S_{i_1} \times S_{i_2} + \sum_{d=0}^{D_1} M^d + n_{D_2} \times 2 + n_{D_1} \times n_{D_2}$ réels
Reconstruction	$\sum_{d=0}^{D_2} \frac{(d+1)(d+2)}{2} M^d + \sum_{d=0}^{D_1} M^d$ réels

Le taux de compression de ce modèle, déterminé à partir de l'équation (2.44), est calculé de la façon suivante :

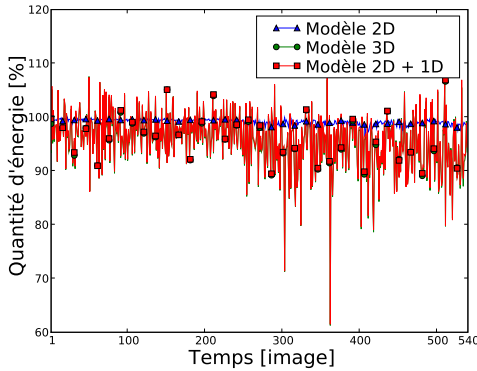
$$\tau_{[\%]} = \left(1 - \frac{n_{D_1}}{S_{i_1} \times S_{i_2}}\right) \times 100 \quad (5.5)$$

avec  $n_{D_1}$  le nombre de polynômes de la base monodimensionnelle et  $S_{i_1} \times S_{i_2}$  la taille des champs de déplacement.

Comme précédemment, nous étudions ici la qualité de ce nouveau modèle sur les séquences « demi-cylindre » et « cylindre-carré ». Nous étudions également les temps de calcul et l'occupation mémoire de ce modèle, ainsi que sa capacité à compresser les données.

### 5.2.1 Qualité de la modélisation pour la séquence « demi-cylindre »

Nous avons vu précédemment qu'une base de degré 22 permet d'obtenir une erreur de modélisation faible, pour les modèles 2D et 3D. Nous décidons d'utiliser ce même degré ici. Nous projetons donc l'ensemble des champs de la séquence sur une base bidimensionnelle de degré 22, comme nous l'avons détaillé au chapitre précédent. Nous projetons ensuite l'ensemble des coefficients de projection obtenus sur une base monodimensionnelle de degré 22. La FIGURE 5.8 représente la quantité d'énergie cinétique modélisée. La FIGURE 5.22 présente quatre champs de déplacement, dont le premier et le dernier champs de la séquence, modélisés avec les modèles 2D et 2D+1D. Nous constatons alors que, pour cette séquence, le modèle 2D+1D



	Modèle 2D	Modèle 3D	Modèle 2D+1D
Moyenne	99.14 %	95.59 %	95.82 %
Écart-type	0.48	5.12	5.12
Minimum	96.41 %	61.27 %	61.48 %
Maximum	99.93 %	107.58 %	107.42 %

FIGURE 5.8 – Séquence « demi-cylindre » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant un modèle 2D, un modèle 3D ou un modèle 2D+1D, pour chaque champ de la séquence. Pour ces trois modèles, les bases utilisées sont de degré 22.

offre des résultats comparables au modèle 3D. Les grosses structures de l'écoulement sont correctement modélisées. La FIGURE 5.9 représente l'évolution temporelle des deux coefficients de projection les plus énergétiques de la deuxième composante issus du modèle 2D ainsi que les coefficients de projection reconstruits après une modélisation 2D+1D. Nous constatons que, pour ces deux coefficients, leur évolution temporelle est correctement modélisée par ce modèle 2D+1D. De plus, ce modèle permet de supprimer les pics présents pour les champs 304 et 363 en lissant le signal : une modélisation spatio-temporelle de ces coefficients permet d'assurer une continuité dans le temps de la séquence. La FIGURE 5.10 représente les champs de déplacement 304 et 363 reconstruits ainsi que les champs précédents et les champs suivants. Nous constatons alors que la zone à forte énergie située en haut à droite de ces champs a été supprimée, rendant le mouvement plus cohérent. Des résultats similaires sont obtenus pour les autres coefficients de projection.

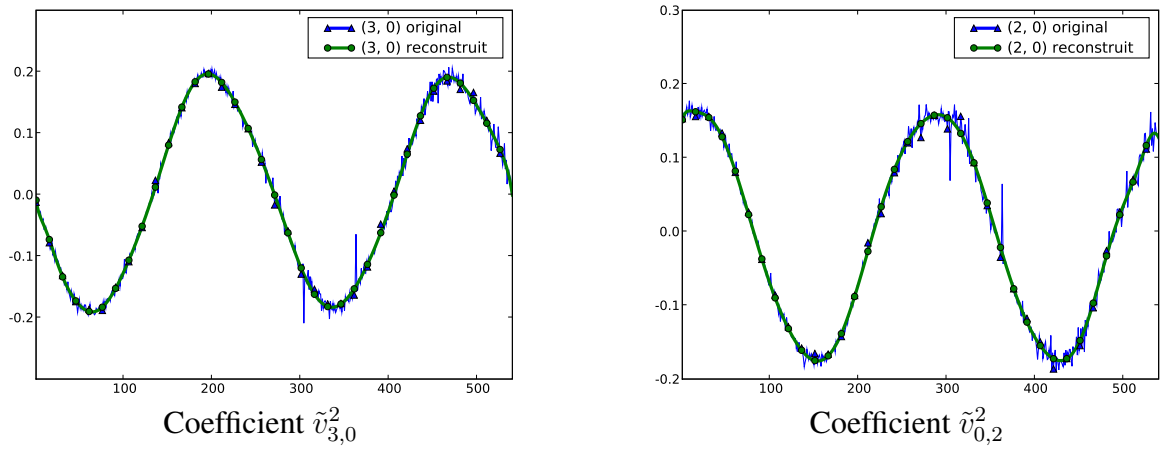


FIGURE 5.9 – Séquence « demi-cylindre » : représentation de l'évolution temporelle des deux coefficients de projection les plus énergétiques de la deuxième composante issus d'une modélisation bidimensionnelle en utilisant une base de degré 22, ainsi que les coefficients de projection reconstruits grâce à un modèle 2D+1D, en utilisant une base bidimensionnelle de degré 22 et une base monodimensionnelle de degré 22.

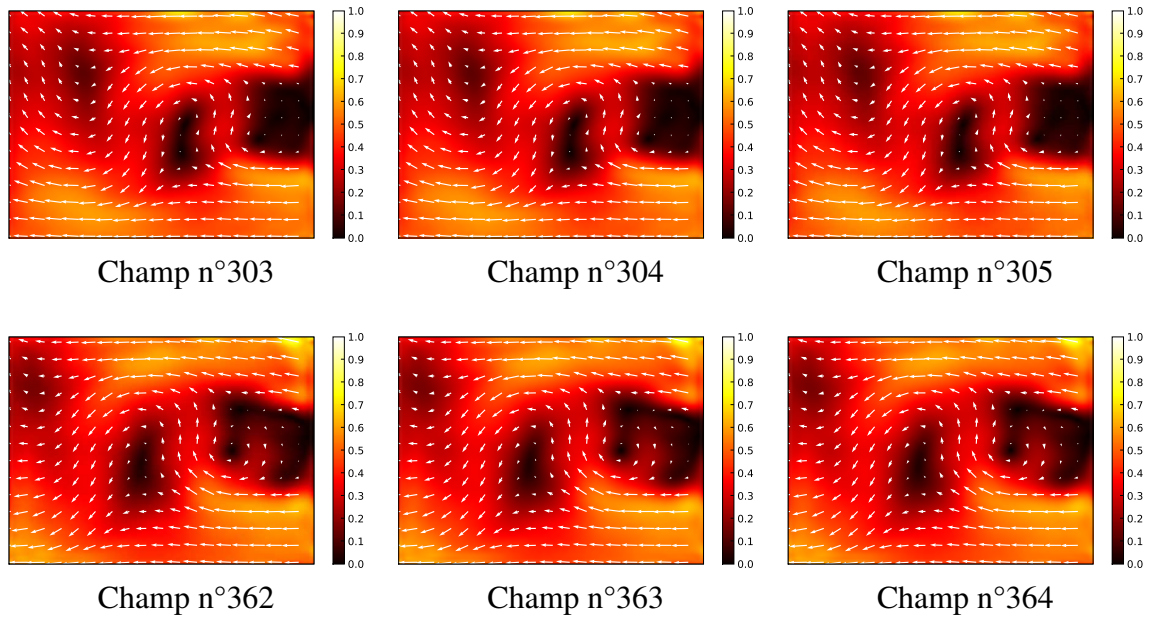
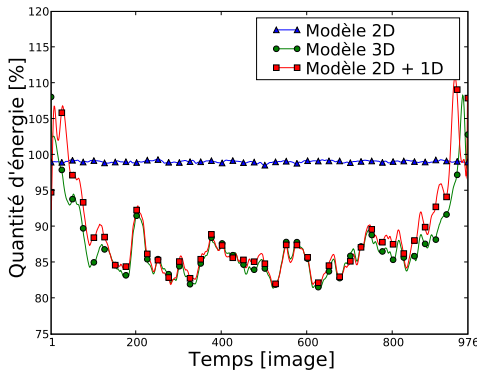


FIGURE 5.10 – Séquence « demi-cylindre » : représentation des champs 304 et 363 reconstruits en utilisant le modèle 2D+1D, ainsi que les champs précédents et les champs suivants. Pour des raisons de lisibilité, une carte de couleur représentant la norme de chaque vecteur a été ajoutée et seul un vecteur sur cinq est affiché.

### 5.2.2 Qualité de la modélisation pour la séquence « cylindre-carré »

Nous effectuons maintenant le même processus pour la séquence « cylindre-carré ». Nous projetons donc chaque coefficient de projection issu de la modélisation spatiale bidimensionnelle sur une base monodimensionnelle de degré 20. La FIGURE 5.11 représente la quantité d'énergie cinétique modélisée par chaque modèle. La FIGURE 5.23 présente quatre champs de déplacement, dont le premier et le dernier champs de la séquence, modélisés avec les modèles



	Modèle 2D	Modèle 3D	Modèle 2D+1D
Moyenne	99.06 %	87.10 %	88.34 %
Écart-type	0.13	4.73	5.85
Minimum	98.55 %	81.36 %	81.60 %
Maximum	99.37 %	108.28 %	110.93 %

FIGURE 5.11 – Séquence « cylindre-carré » : représentation de la quantité d'énergie cinétique modélisée en utilisant un modèle 2D, un modèle 3D ou un modèle 2D+1D, pour chaque champ de la séquence. Pour ces trois modèles, les bases utilisées sont de degré 20.

2D et 2D+1D. Comme avec le modèle 3D, nous constatons que le modèle 2D+1D ne permet pas d'obtenir une modélisation correcte de l'écoulement en utilisant des bases de degré 20. Cela s'explique en étudiant la FIGURE 5.12 qui représente l'évolution temporelle des deux coefficients de projection les plus énergétiques de la deuxième composante issus du modèle 2D ainsi que les coefficients de projection reconstruits après une modélisation 2D+1D.

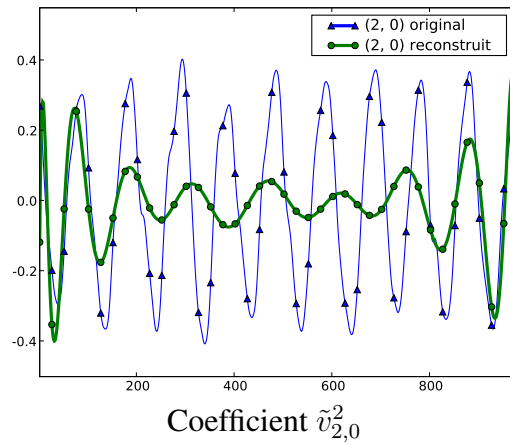
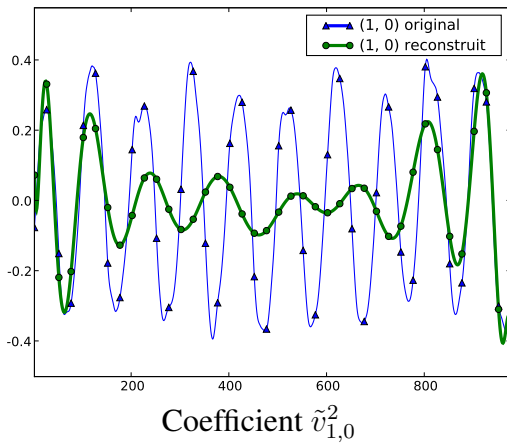
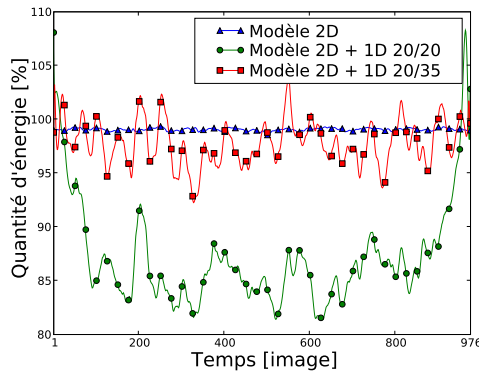


FIGURE 5.12 – Séquence « cylindre-carré » : représentation de l'évolution temporelle des deux coefficients de projection les plus énergétiques de la deuxième composante issus d'une modélisation bidimensionnelle en utilisant une base de degré 20, ainsi que les coefficients de projection reconstruits grâce à un modèle 2D+1D, en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 20.

Nous constatons alors que, contrairement à la séquence « demi-cylindre », une base monodimensionnelle de degré 20 ne permet pas de modéliser correctement l'évolution temporelle des coefficients de projection. Il est alors nécessaire d'utiliser une base de degré supérieur pour essayer d'obtenir une modélisation correcte du mouvement. Nous proposons donc de conserver une base bidimensionnelle de degré 20 qui, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, permet d'obtenir une bonne modélisation spatiale du mouvement, mais ensuite d'utiliser une base monodimensionnelle de degré 35 pour modéliser l'évolution temporelle des coefficients de projection. Les résultats obtenus sont présentés FIGURE 5.13. Nous constatons alors que l'erreur de



modélisation de ce nouveau modèle 2D+1D est plus faible que le précédent. De plus, la quantité d'énergie cinétique modélisée est plus importante qu'avec le modèle 3D. En étudiant les champs reconstruits, présentés FIGURE 5.24, nous constatons alors que l'utilisation d'une base de degré 35 permet, cette fois-ci, de modéliser correctement les grosses structures. Cela s'explique par le fait qu'une base monodimensionnelle de degré 35 permet de modéliser correctement l'évolution temporelle des coefficients de projection, comme le montre la FIGURE 5.14. La FIGURE 5.25 représente la distance, pour chaque vecteur, entre les champs originaux et les champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 20 et entre les champs originaux et les champs modélisés avec un modèle 2D+1D en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 35. Nous constatons alors que le modèle 2D+1D engendre des erreurs de modélisation plus importantes dans le sillage proche du cylindre-carré.



	Modèle 2D 20	Modèle 2D+1D 20/20	Modèle 2D+1D 20/35
Moyenne	99.06 %	88.34 %	97.83 %
Écart-type	0.13	5.85	2.07
Minimum	98.55 %	81.60 %	92.26 %
Maximum	99.37 %	110.93 %	103.96 %

FIGURE 5.13 – Séquence « cylindre-carré » : représentation de l'erreur de modélisation en utilisant un modèle 2D et deux modèles 2D+1D. La base utilisée pour le modèle 2D est de degré 20. Les bases utilisées pour le premier modèle 2D+1D sont de degré 20. Pour le deuxième modèle 2D+1D, la base utilisée pour le modèle 2D est de degré 20 et la base utilisée pour le modèle 1D est de degré 35.

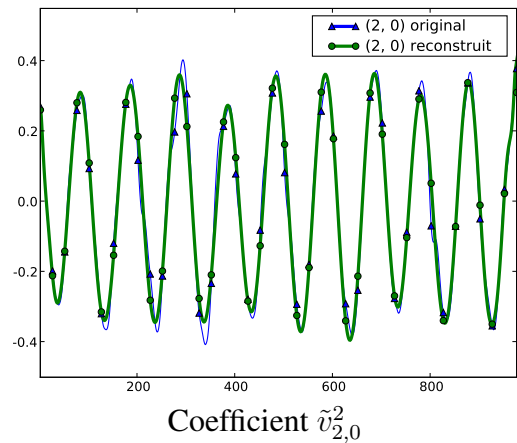
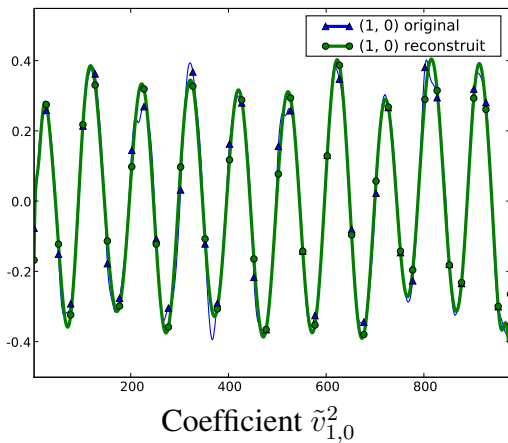


FIGURE 5.14 – Séquence « cylindre-carré » : représentation de l'évolution temporelle des deux coefficients de projection les plus énergétiques de la deuxième composante issus d'une modélisation bidimensionnelle en utilisant une base de degré 20, ainsi que les coefficients de projection reconstruits grâce à un modèle 2D+1D, en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 35.

### 5.2.3 Temps de calcul et occupation mémoire

Nous avons précisé précédemment que le modèle 2D+1D s'articule autour de deux étapes : une modélisation spatiale suivie d'une modélisation temporelle. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la projection bidimensionnelle de chaque séquence ne prenait que quelques secondes. Concernant la projection monodimensionnelle des coefficients de projection obtenus, cette étape est également rapide, de l'ordre de la seconde. Au final, les temps de calcul du modèle 2D+1D sont donc faibles, pour chaque séquence.

Concernant l'occupation mémoire, ce modèle nécessite la quantité de mémoire du modèle 2D étudié au chapitre précédent à laquelle viennent s'ajouter  $n_{D_2} \times n_C$  réels avec  $n_{D_2}$  le nombre de coefficients issus de la projection sur une base bidimensionnelle de degré  $D$  et  $n_C$  le nombre de champs de la séquence. Contrairement au modèle 3D, l'occupation mémoire de ce modèle 2D+1D est donc très faible.

### 5.2.4 Réduction des données

Nous comparons maintenant la capacité des modèles 2D et 2D+1D à compresser l'information. Le TABLEAU 5.6 résume, pour les deux séquences, les taux de compression obtenus en fonction du degré de la base. Dans ce tableau, les modèles barrés sont considérés comme inexploitable car ils ne permettent pas d'obtenir une qualité de modélisation suffisante. Nous constatons que les taux de compression engendrés par le modèle 2D+1D sont extrêmement importants, pour les deux séquences.

TABLEAU 5.6 – *Taux de compression obtenus avec un modèle 2D et un modèle 2D+1D en fonction du degré de la base, pour les séquences « demi-cylindre » et « cylindre-carré ». Les modèles barrés sont considérés comme inexploitable car ils ne permettent pas d'obtenir une qualité de modélisation suffisante.*

Séquence	Modèle 2D			Modèle 2D+1D			
	degré	réels	compression	degré 2D 1D	réels	compression	
« demi-cylindre » 6 512 400 réels	7	38 880	99.40 %	<del>7</del>	<del>7</del>	<del>504</del>	<del>99.99 %</del>
	22	298 080	95.42 %	22	22	12 144	99.81 %
« cylindre-carré » 15 006 976 réels	11	152 256	98.99 %	<del>11</del>	<del>11</del>	<del>1 716</del>	<del>99.97 %</del>
	20	450 912	97.00 %	<del>20</del>	<del>20</del>	<del>9 240</del>	<del>99.86 %</del>
				20	35	16 170	99.75 %

### 5.2.5 Conclusion

Ce modèle 2D+1D fournit une représentation spatio-temporelle de la séquence. Contrairement au modèle 3D, il permet de dissocier la modélisation spatiale bidimensionnelle et la modélisation temporelle monodimensionnelle en séparant les différentes projections. Nous pouvons alors utiliser des degrés différents pour chaque étape. De plus, ce processus permet d'utiliser la « méthode optimisée ». De ce fait, les temps de calcul de ce modèle sont beaucoup moins importants que ceux engendrés par l'utilisation d'un modèle 3D. Cela nous permet alors d'utiliser des

degrés élevés pour la modélisation temporelle. La séquence « cylindre-carré » peut alors être modélisée avec une qualité suffisante pour être exploitable. De plus, les taux de compression restent extrêmement importants. Ce modèle 2D+1D offre donc des perspectives intéressantes dans le but de faire de la simulation de données ou des applications temps-réels et reste utilisable pour faire de la compression.

Ce modèle spatio-temporel présente toutefois un inconvénient : sa complexité dépend, en partie, de la durée de la séquence et non pas uniquement du type du mouvement étudié. Par exemple, dans le cas d'une séquence présentant des phénomènes périodiques, la modélisation d'une nouvelle période nécessite l'utilisation de polynômes de degrés supérieurs. Il serait alors intéressant de proposer une nouvelle modélisation temporelle dont la complexité n'est pas dépendante de la durée d'étude du phénomène en utilisant, par exemple, une modélisation prenant en compte les phénomènes périodiques ou une « approche fenêtrée », c'est-à-dire basée sur la répétition de motifs.

### 5.3 Influence de la résolution temporelle

Nous étudions maintenant l'influence de la résolution temporelle sur la qualité de la modélisation. Pour cela, nous proposons de modéliser le mouvement contenu dans la séquence « cylindre-carré » en faisant varier le nombre de champs originaux utilisé pour la modélisation. Par la suite, nous décidons de conserver : tous les champs (c'est-à-dire les 976 champs initiaux), un champ sur deux, un champ sur cinq, un champ sur dix, un champ sur vingt ou un champ sur cinquante. Nous utilisons ici le modèle 2D+1D présenté précédemment avec une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 35. Nous évaluons alors la qualité des résultats en reconstruisant la séquence originale, à partir du modèle 2D+1D obtenu. Les champs supprimés initialement sont reconstruits en calculant les coefficients de projection manquants grâce au modèle 1D. Le processus complet est présenté FIGURE 5.15. Nous rappelons que l'interpolation des coefficients est effectuée à partir de l'expression analytique obtenue grâce à notre méthode. Nous calculons alors, pour chaque vecteur, l'erreur quadratique entre l'énergie du vecteur appartenant au champ original et l'énergie du vecteur correspondant dans le champ reconstruit. Les résultats présentés FIGURE 5.16 représentent la moyenne, sur toute la séquence, de l'erreur précédemment calculée. Nous constatons alors que l'erreur quadratique

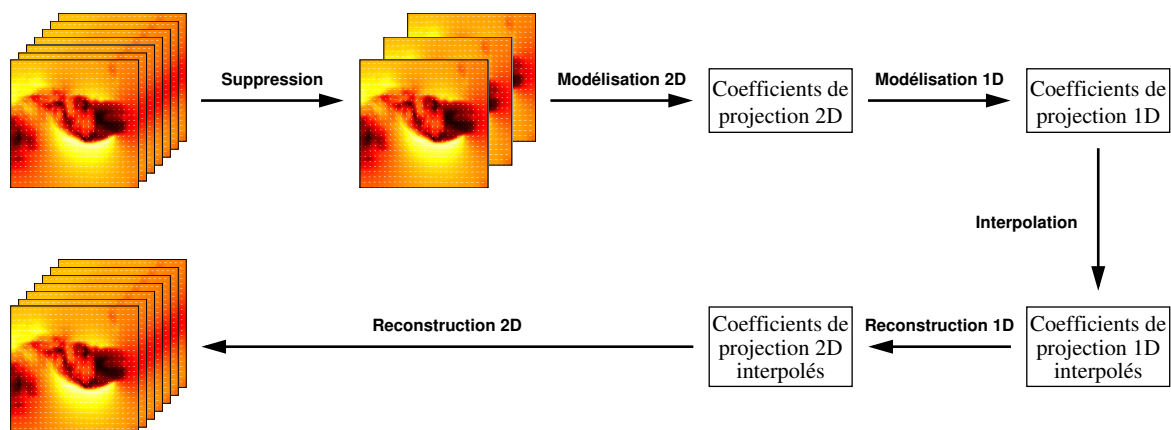


FIGURE 5.15 – Processus de test utilisé pour évaluer l'influence de la résolution temporelle.

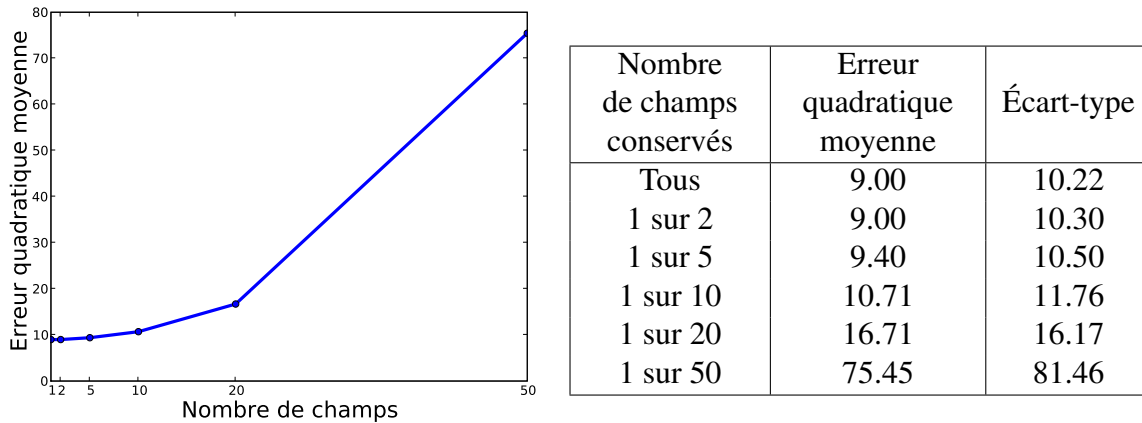


FIGURE 5.16 – Séquence « cylindre-carré » : évolution de l'erreur quadratique, calculée à partir de tous les coefficients de projection des deux composantes, entre le signal issu d'une modélisation 2D et le signal issu d'un modèle 2D+1D en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 35, en conservant tous les champs, 1 champ sur 2, 1 champ sur 5, 1 champ sur 10, 1 champ sur 20 et 1 champ sur 50.

reste faible si on utilise tous les champs, un champ sur deux, un champ sur cinq voire même un champ sur dix. Au delà, les résultats commencent à se dégrader. La FIGURE 5.17 représente l'évolution temporelle du coefficient de projection le plus énergétique de la seconde composante issu de la modélisation bidimensionnelle ainsi que l'évolution temporelle de ce même coefficient en utilisant un modèle 2D+1D et un nombre limité de champs de déplacement. L'étude des signaux reconstruits confirme alors les résultats précédents : lorsque l'on utilise tous les champs, un champ sur deux, un champ sur cinq ou un champ sur dix, l'écart entre le signal original et le signal reconstruit reste faible. Cet écart augmente lorsque l'on utilise un champ sur vingt ou un champ sur cinquante. Des résultats similaires sont obtenus avec les autres coefficients de projection. Un exemple de champs reconstruits en utilisant ces différents modèles est donné FIGURE 5.26. Cette propriété d'interpolation temporelle des données manquantes offre des perspectives intéressantes. Par exemple, dans le cas de la séquence « cylindre-carré », nous pouvons accélérer les temps de calcul en ne traitant qu'un champ sur dix, tout en conservant une qualité de modélisation élevée. Nous pouvons aussi réduire le volume des données à stocker en ne conservant qu'un nombre limité de champs. Durant les manipulations, nous pouvons également diminuer la fréquence d'acquisition des images ce qui permet d'augmenter la durée d'étude et donc d'obtenir une représentation complète des phénomènes constituant l'écoulement étudié.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux modèles permettant d'obtenir une représentation spatio-temporelle des séquences « demi-cylindre » et « cylindre-carré » présentées au chapitre 4. Tout d'abord, nous avons étudié un modèle 3D permettant de représenter une séquence considérée comme un seul champ à trois dimensions par des combinaisons linéaires de polynômes trivariés. Nous avons alors constaté que ce modèle 3D est coûteux en temps de calcul. De plus, il ne permet pas de dissocier le degré de la modélisation spatiale du degré de la modélisation temporelle, ce qui est un inconvénient pour les écoulements étudiés dans ce mé-

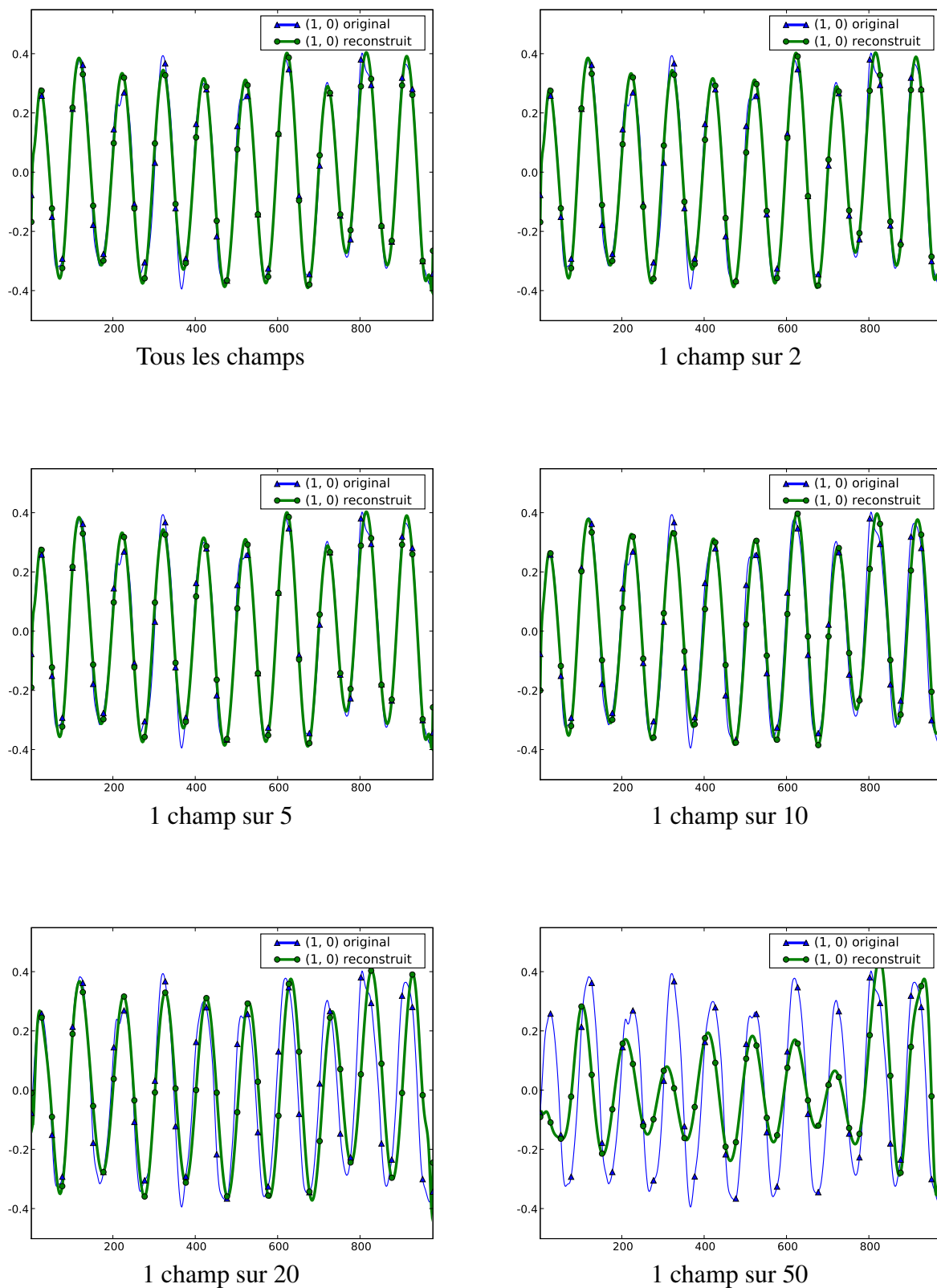


FIGURE 5.17 – Séquence « cylindre-carré » : comparaison de l'évolution temporelle du coefficient le plus énergétique de la séquence en utilisant un modèle 2D ou un modèle 2D+1D, en fonction du nombre de champs originaux utilisés.

moire. Nous avons alors proposé une seconde approche consistant à effectuer une modélisation spatiale suivie d'une modélisation temporelle. Cette nouvelle approche permet d'obtenir une bonne qualité de modélisation des écoulements, tout en étant peu coûteux en temps de calcul ou en occupation mémoire. De plus, ce modèle fournit des taux de compression extrêmement importants. Il permet également de supprimer une partie du bruit contenu dans la séquence en assurant une continuité temporelle du mouvement. Nous avons ensuite étudié l'influence de la résolution temporelle de la séquence sur la qualité de la modélisation. Nous avons alors constaté que l'interpolation temporelle engendrée par la modélisation monodimensionnelle permet d'assurer une bonne qualité des résultats tout en limitant le nombre de champs de déplacement utilisés pour la modélisation.

Notre méthode permet donc d'obtenir rapidement une modélisation d'ordre réduit de l'écoulement étudié. Par la suite, nous souhaitons l'intégrer dans des systèmes dynamiques, c'est-à-dire des systèmes permettant de prédire des états non-observés à partir d'un ensemble de réalisations. Pour cela, plusieurs méthodes sont envisageables. La première approche consiste à prédire l'évolution temporelle des coefficients de projection en utilisant des modèles prédictifs tels que les modèles auto-régressifs. Une seconde méthode consiste à résoudre les équations de Navier-Stokes décrivant les mouvements fluides en projetant ces équations sur une base orthogonale via des projections de Galerkin. De nombreux travaux utilisent comme base la base orthogonale obtenue par une décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) de l'écoulement étudié. On parle alors de méthode POD-Galerkin. Nous proposons ici de remplacer la base POD par la base composée des polynômes de Legendre présentée durant ce mémoire. Cela permettrait de résoudre ces équations aux dérivées partielles en intégrant les propriétés de cette base telles que son expression polynomiale, sa capacité à modéliser l'écoulement ou les faibles temps de calcul associés.

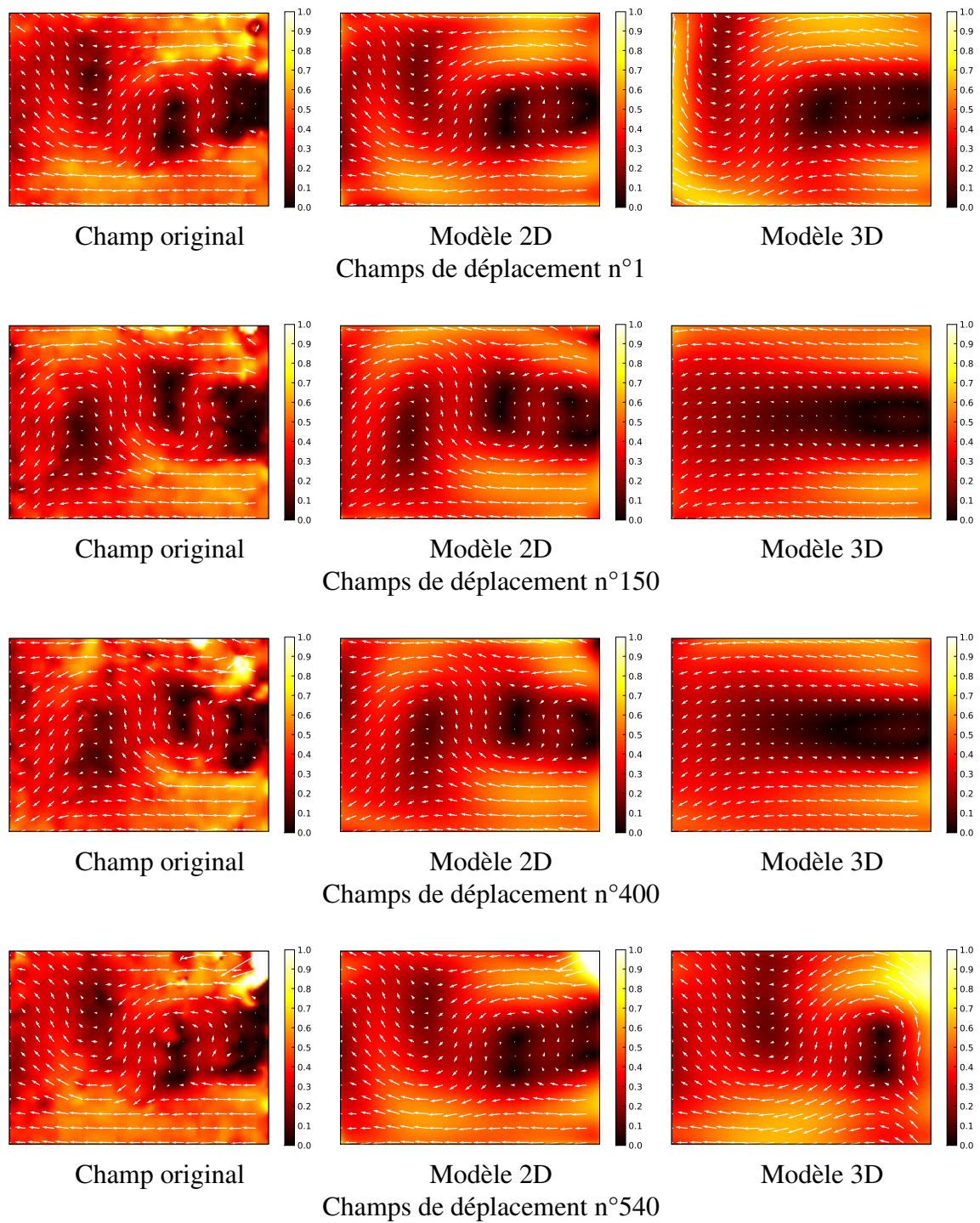


FIGURE 5.18 – Séquence « demi-cylindre » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 7 et de champs modélisés avec une base tridimensionnelle de degré 7.



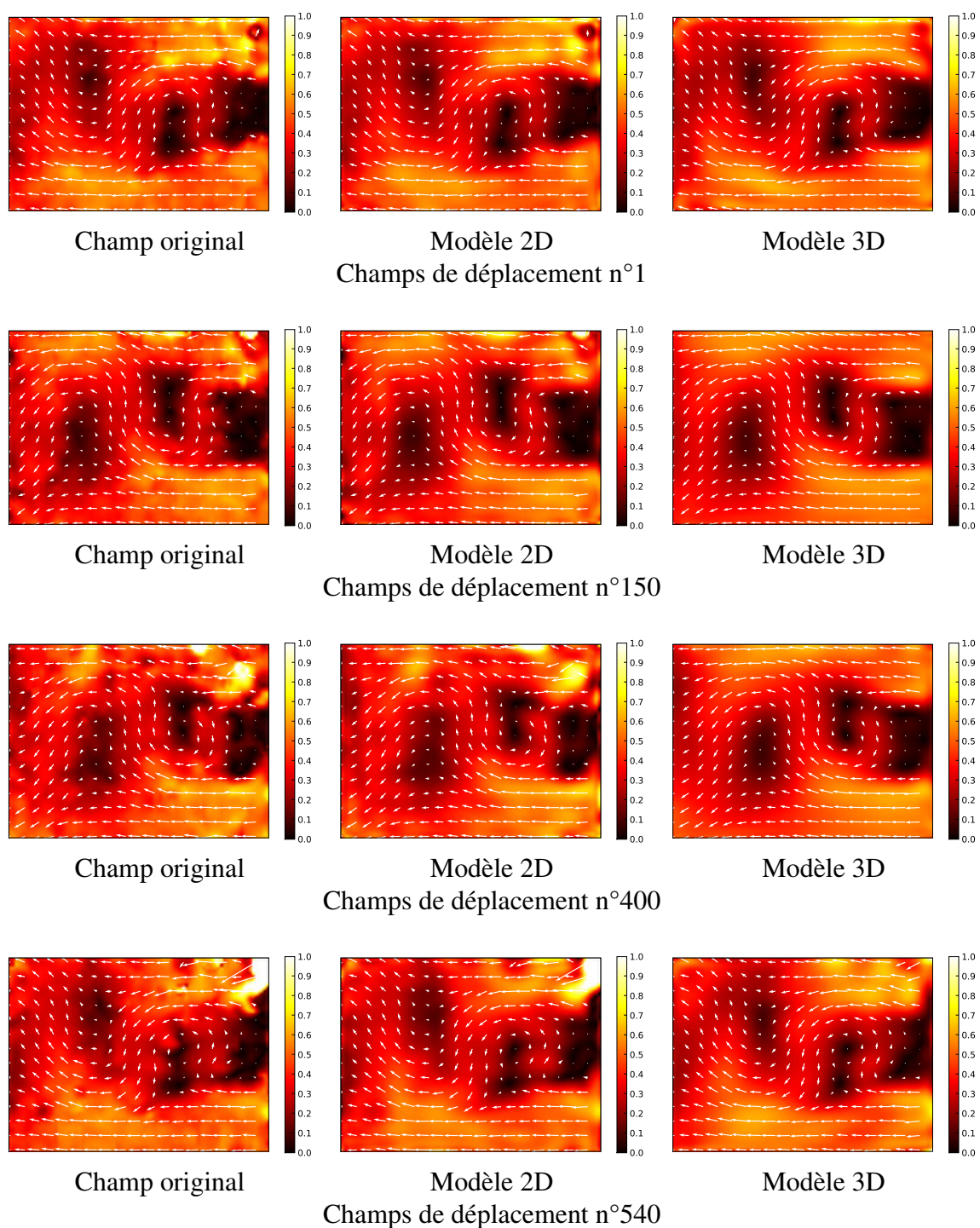


FIGURE 5.19 – Séquence « demi-cylindre » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 22 et de champs modélisés avec une base tridimensionnelle de degré 22.



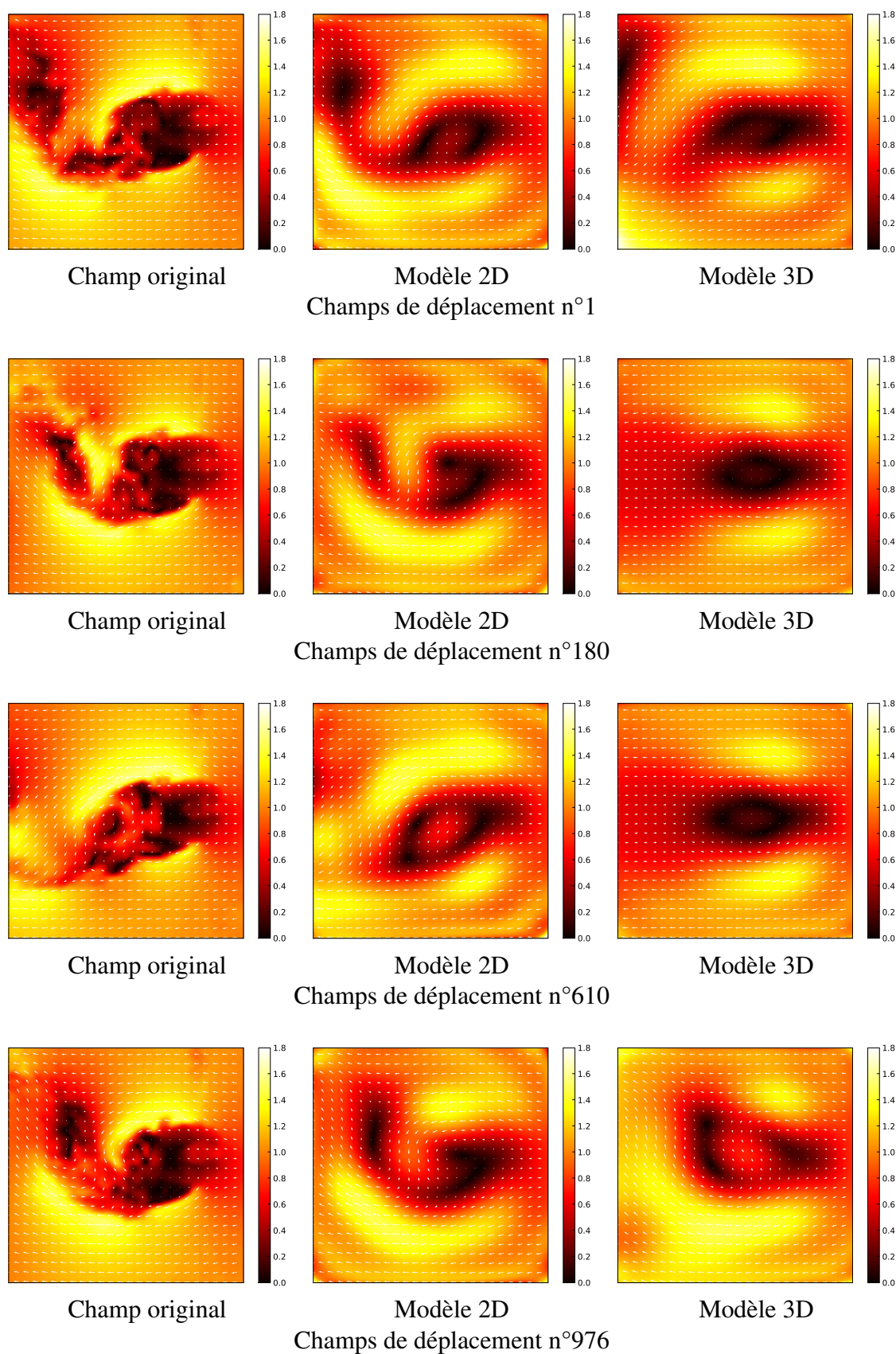


FIGURE 5.20 – Séquence « cylindre-carré » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 11 et de champs modélisés avec une base tridimensionnelle de degré 11.

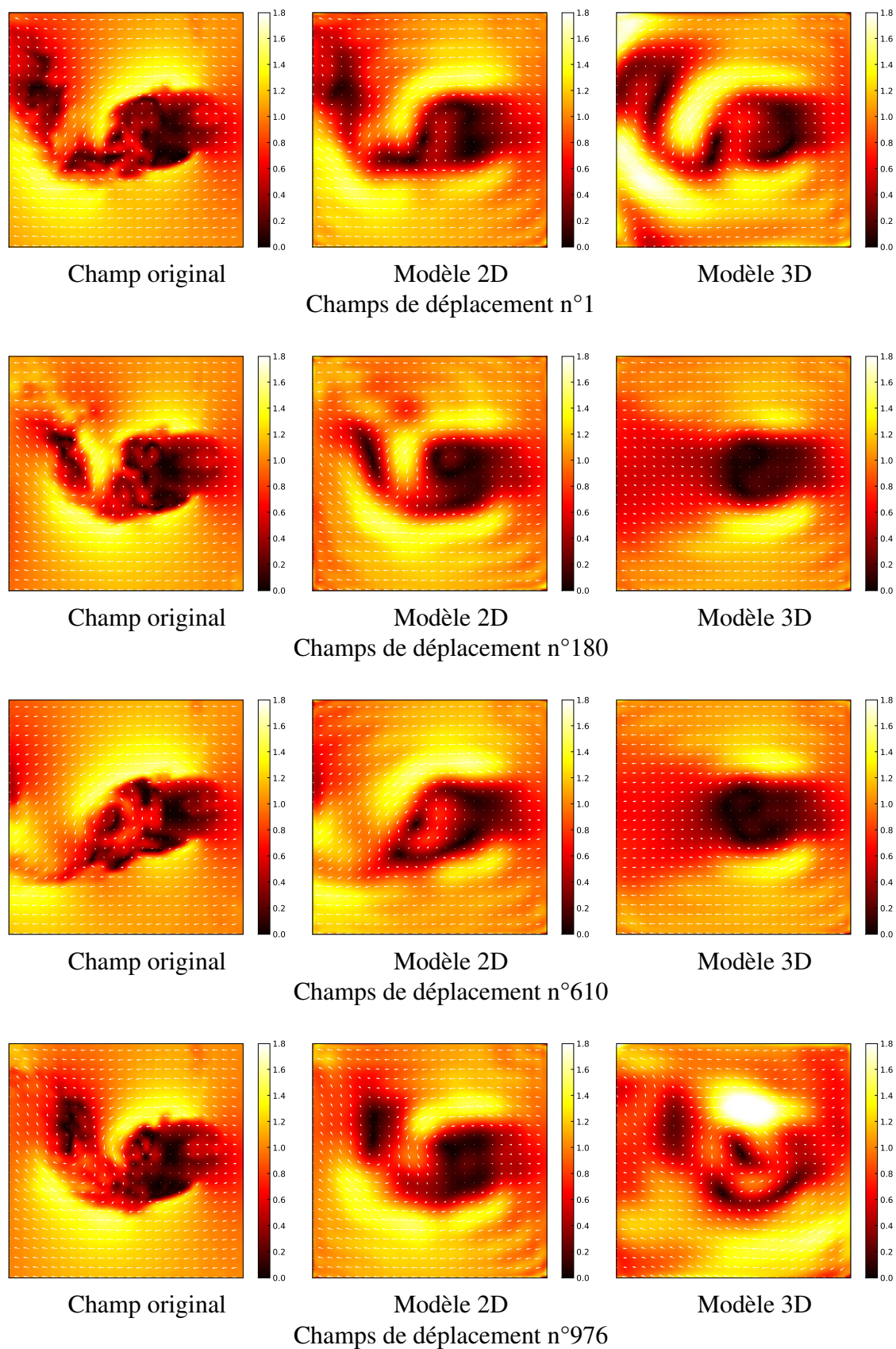


FIGURE 5.21 – Séquence « cylindre-carré » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 20 et de champs modélisés avec une base tridimensionnelle de degré 20.

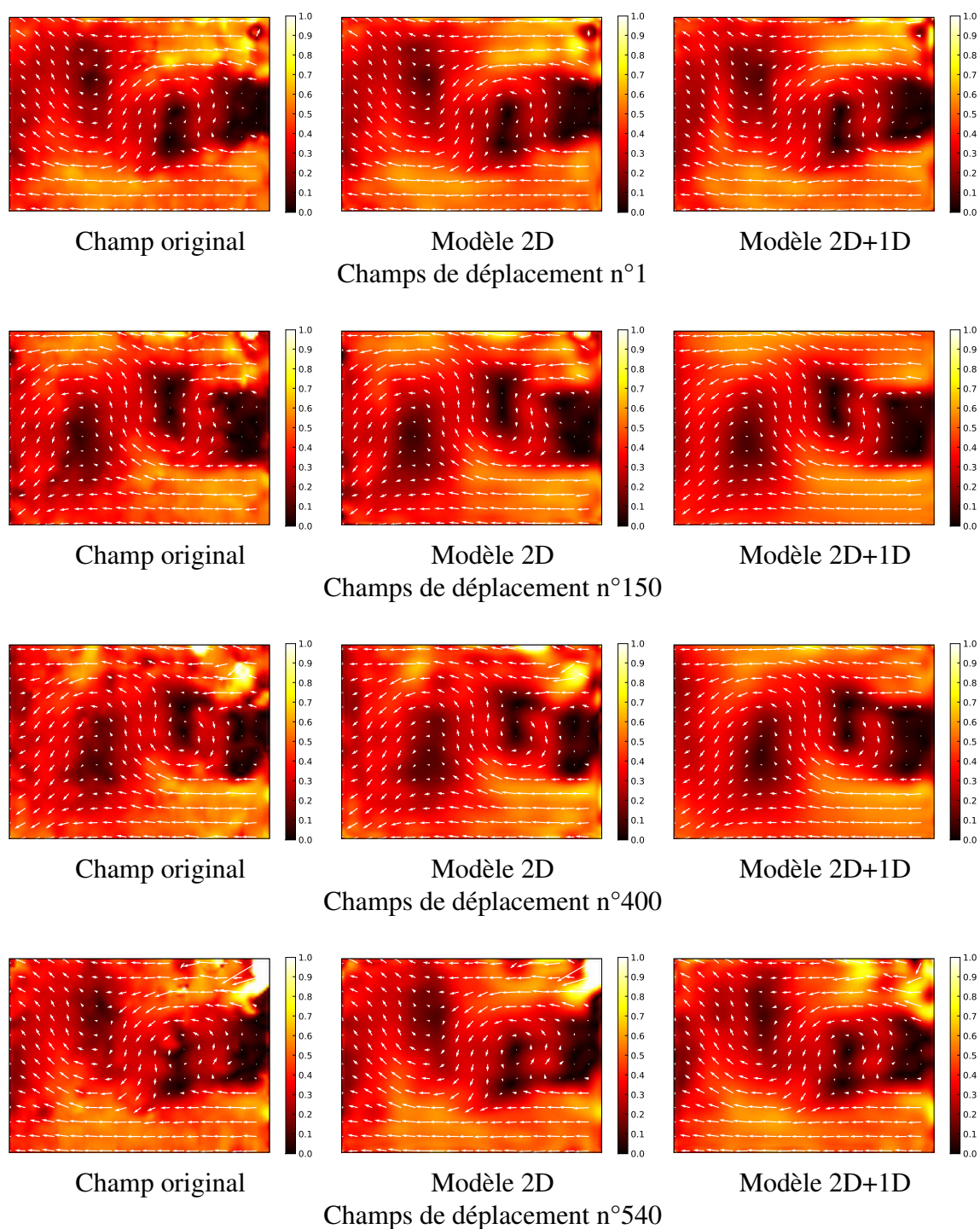


FIGURE 5.22 – Séquence « demi-cylindre » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 22 et de champs modélisés avec des bases monodimensionnelles et bidimensionnelles de degré 22.



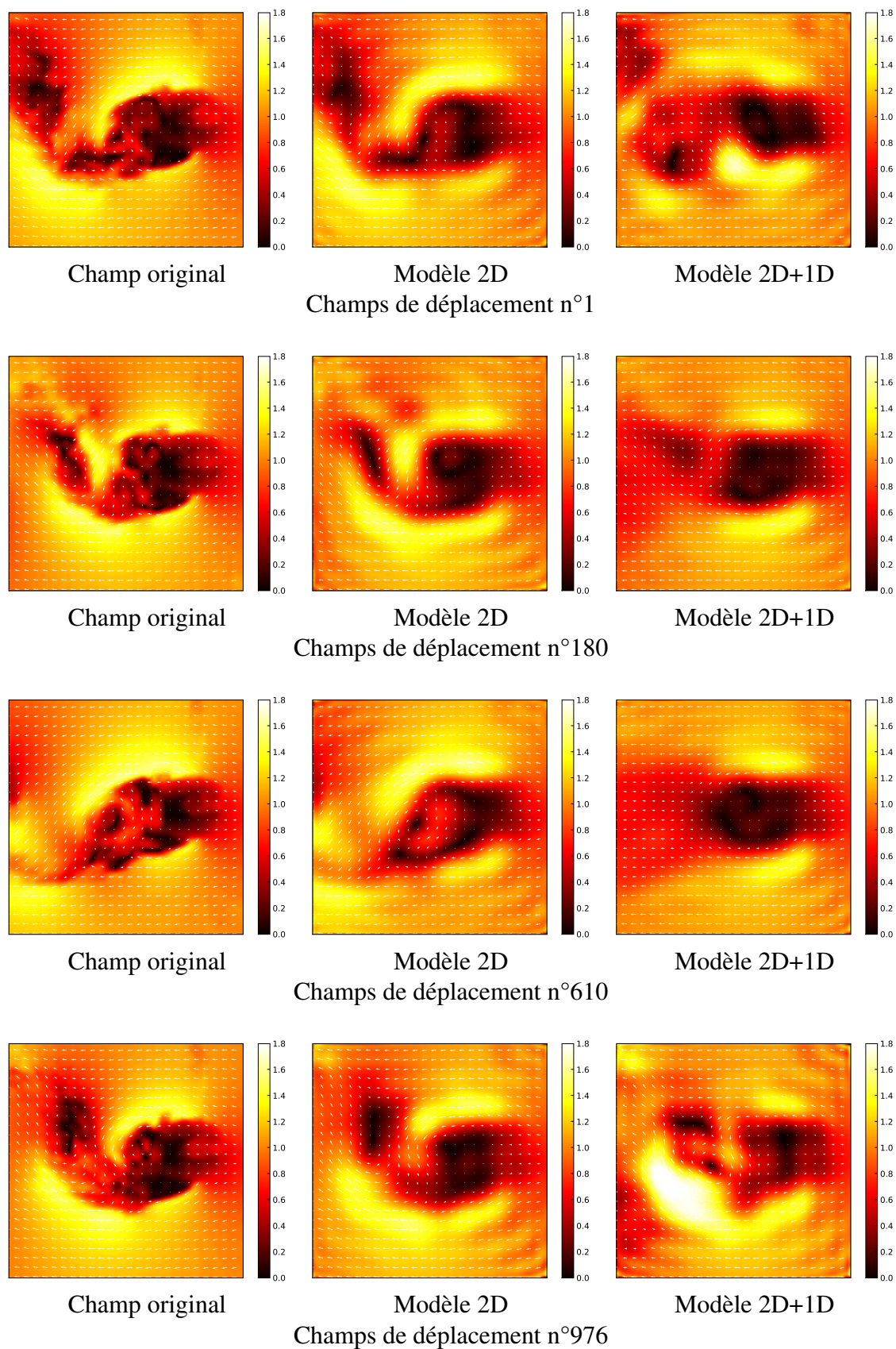


FIGURE 5.23 – Séquence « cylindre-carré » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 20 et de champs modélisés avec des bases monodimensionnelles et bidimensionnelles de degré 20.

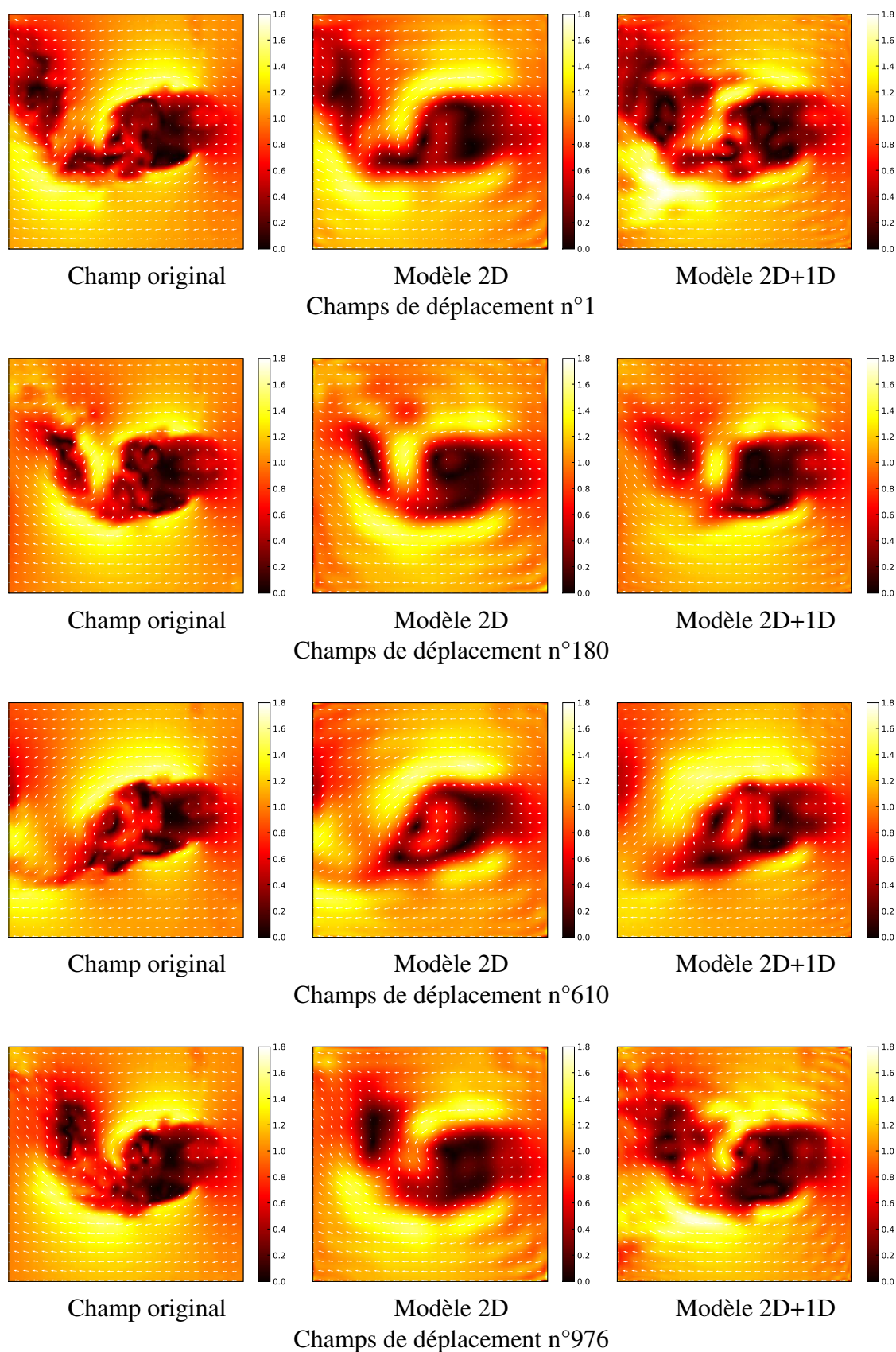


FIGURE 5.24 – Séquence « cylindre-carré » : exemples de champs originaux, de champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 20 et de champs modélisés avec un modèle 2D+1D en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 35.

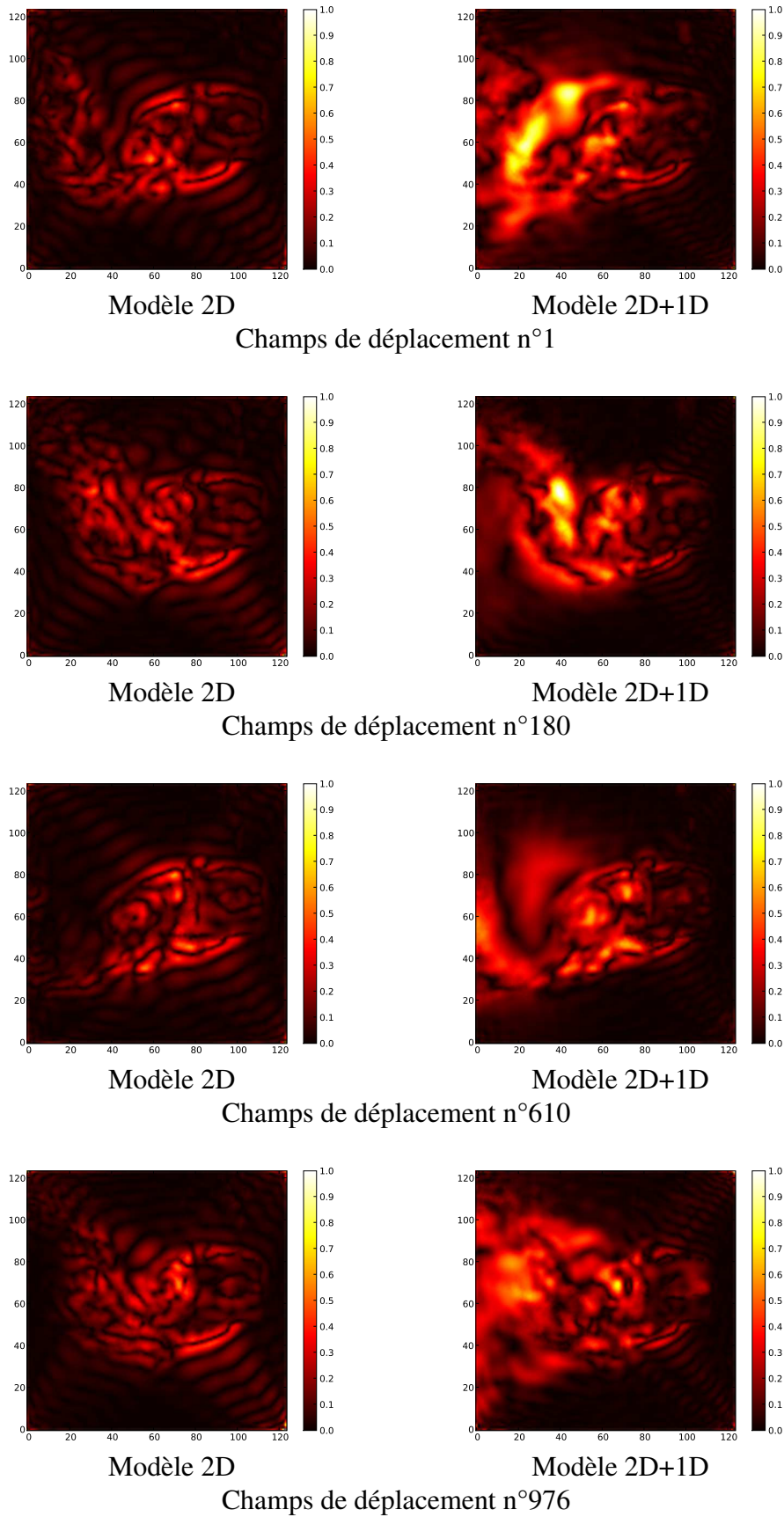


FIGURE 5.25 – Séquence « cylindre-carré » : représentation de la distance, pour chaque vecteur, entre les champs originaux et les champs modélisés avec une base bidimensionnelle de degré 20 et entre les champs originaux et les champs modélisés avec un modèle 2D+1D en utilisant une base bidimensionnelle de degré 20 et une base monodimensionnelle de degré 35.



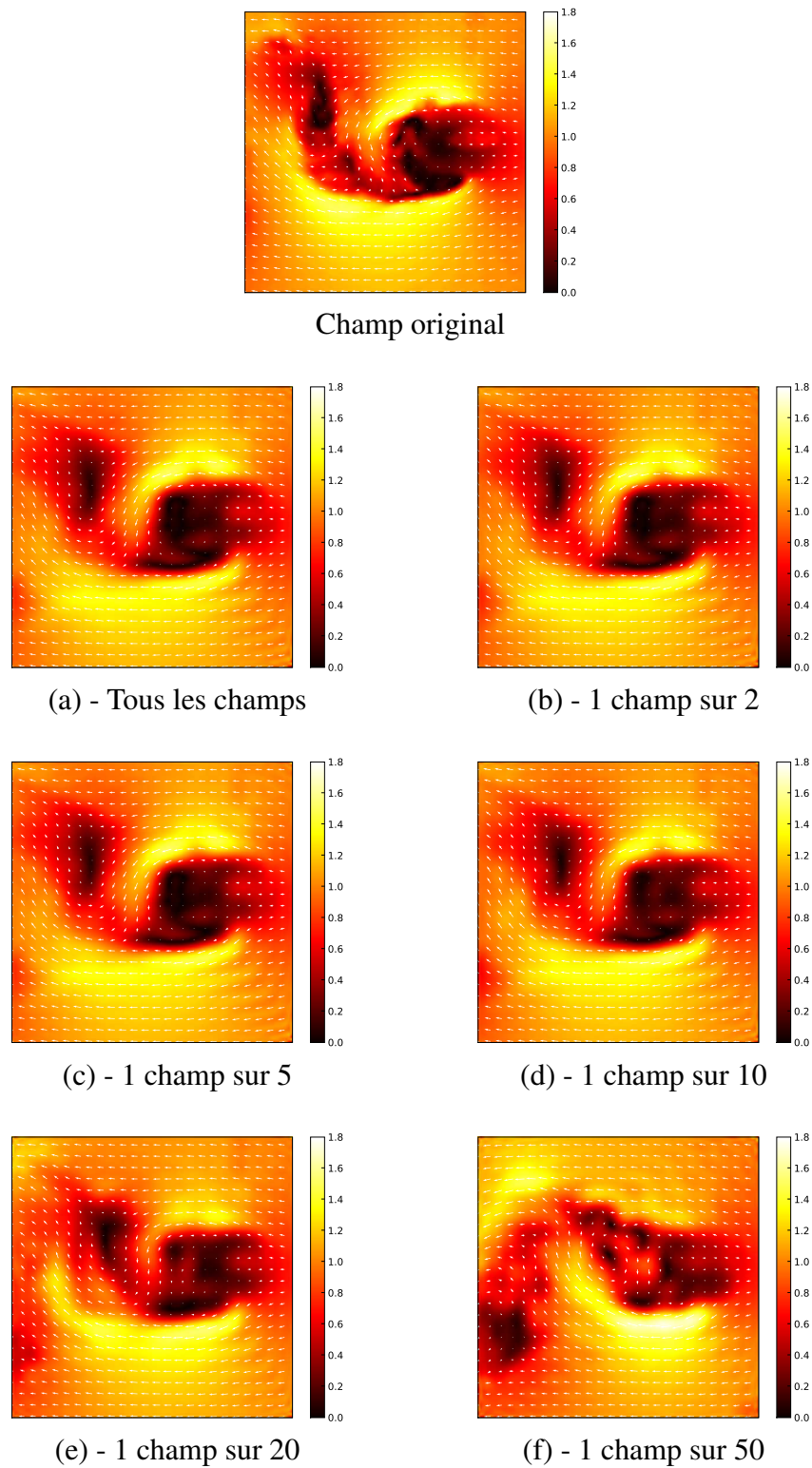


FIGURE 5.26 – Séquence « cylindre-carré » : représentation du champ n°680 reconstruit en utilisant un modèle 2D+1D et (a) - tous les champs de la séquence ; (b) - 1 champ sur 2 ; (c) - 1 champ sur 5 ; (d) - 1 champ sur 10 ; (e) - 1 champ sur 20 ; (f) - 1 champ sur 50.





---

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

Dans ce mémoire, nous avons proposé une méthode permettant de modéliser, de façon globale, tout type de mouvement par des combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux. Nous l'avons appliquée sur trois séquences expérimentales et nous avons évalué sa qualité en comparant les résultats obtenus avec une décomposition orthogonale aux valeurs propres. Nous avons alors constaté que notre méthode permet de modéliser, pour chaque séquence, plus de 99 % de l'énergie cinétique de l'écoulement, ce qui permet d'avoir une bonne représentation des structures principales. De plus, la faible complexité et l'occupation mémoire réduite de notre modèle permet un traitement simple et rapide des différentes séquences. Par ailleurs, les taux de compression sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus par la décomposition orthogonale aux valeurs propres, dont on connaît l'optimalité.

Notre méthode nous a également permis d'obtenir une expression polynomiale du mouvement étudié. Certaines grandeurs dérivées, telles que l'accélération ou la pression, peuvent alors être obtenues facilement. De plus, la base de polynômes utilisée est commune à tous les mouvements. Il est alors possible de les comparer en étudiant directement leurs coefficients de projection. Par ailleurs, le calcul des coefficients d'un champ ne fait pas intervenir les autres champs de la séquence. De ce fait, de nouveaux champs peuvent être ajoutés à cette séquence sans devoir recalculer les coefficients déjà obtenus et le temps de projection d'un champ est constant, quel que soit le nombre de champs qui la compose.

En étudiant le comportement des coefficients de projection de notre modèle, nous avons pu extraire certaines informations telles que la quantité de mouvement contenue dans la séquence. Nous avons également donné un sens physique aux premiers coefficients issus de la projection d'un champ sur une base de Legendre. Cette caractéristique nous a alors permis d'interpréter le mouvement dominant d'une séquence ou les mouvements de tête d'un utilisateur situé devant une webcam en effectuant une modélisation d'ordre réduit. De plus, nous avons extrait certaines informations concernant les différentes séquences en étudiant l'évolution temporelle des coefficients de projection.

Pour terminer, nous avons généralisé notre processus afin de modéliser des champs multidimensionnels multicomposantes. Cela nous a permis d'étendre la modélisation spatiale proposée au début du mémoire à une modélisation spatio-temporelle. Ce nouveau modèle assure alors une continuité temporelle au mouvement étudié, ce qui permet, par exemple, de supprimer du bruit

de mesure en lissant le signal. Il permet également d'effectuer une interpolation temporelle des données. De ce fait, nous avons montré qu'il est possible de conserver une bonne modélisation des différentes structures de l'écoulement même si l'on diminue la résolution temporelle de la séquence. Finalement, la faible complexité engendrée par la modélisation temporelle permet de conserver des temps de calcul réduits. L'utilisation de ce modèle dans des systèmes dynamiques semble donc envisageable.

Ce travail pose les bases d'une méthode générique de modélisation du mouvement que nous appliquons à l'étude d'écoulements fluides. Pour poursuivre l'étude expérimentale que nous avons présentée au chapitre 4, il serait intéressant d'étudier le comportement des coefficients de projection sur de nouvelles séquences.

Comme nous l'avons précisé au chapitre 5, nous souhaitons intégrer notre méthode dans un système dynamique afin d'estimer un certain nombre de réalisations n'appartenant pas aux données initiales. Le principe serait alors de déterminer un ensemble de coefficients de projection situé en dehors du domaine de définition initial dans le but de générer des champs de déplacements représentant des phénomènes non-observés. Les deux pistes étudiées actuellement concernent, d'une part, l'utilisation de modèles auto-régressifs et, d'autre part, la mise en place de la méthode de projection de Galerkin à partir de notre approximation polynomiale afin de résoudre les équations de Navier-Stokes.

Il pourrait également être intéressant d'intégrer notre modèle dans un processus d'estimation du mouvement. En effet, nous avons vu aux chapitres 3 et 4 que notre méthode permet de modéliser tout type de mouvement, qu'il soit simple ou complexe. Le but serait alors de contraindre la phase d'estimation des champs de déplacement par notre modèle afin d'intégrer certaines contraintes physiques sur le mouvement étudié.

Comme nous l'avons précisé au chapitre 2, nous approximons un signal discret par un signal continu. À partir de l'expression analytique du mouvement, il est possible de reconstruire un champ de déplacement dont la taille est différente du champ initial. Par ce procédé, nous pouvons donc simplement et rapidement interpoler les données initiales. Il serait alors intéressant de comparer la qualité de l'interpolation issue de notre méthode avec des algorithmes d'interpolation connus (linéaires, cubiques, splines, sinus-cardinal...).

Dans ce mémoire, nous effectuons une modélisation globale du mouvement. Il pourrait être intéressant de proposer une approche hiérarchique afin de décomposer le mouvement global de complexité élevé en un ensemble de mouvements locaux de complexités réduites. Plusieurs approches sont alors possibles comme, par exemple, le découpage du champ en blocs de mouvements uniformes, l'utilisation de structures de type *quadtree* ou la modélisation du mouvement autour de points singuliers. Actuellement, ces travaux font l'objet de la thèse d'Olivier Kihl, doctorant au laboratoire XLIM-SIC [Kihl 08a, Kihl 08b].

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [Augereau 05] B. Augereau, B. Tremblais & C. Fernandez-Maloigne. *Vectorial Computation of the Optical Flow in Color Image Sequences*. In Proceedings of the Thirteenth Color Imaging Conference, pages 130–134, 2005.
- [Barron 94] J. L. Barron, D. J. Fleet & S. S. Beauchemin. *Performance of Optical Flow Techniques*. International Journal of Computer Vision, vol. 12, no. 1, pages 43–77, 1994.
- [Bergen 92] J. R. Bergen, P. Anandan, K. J. Hanna & R. Hingorani. *Hierarchical Model-Based Motion Estimation*. In Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision, pages 237–252, 1992.
- [Bergman 04] M. Bergman. *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine - LEMTA, 2004.
- [Bigün 87] J. Bigün & G. H. Granlund. *Optimal Orientation Detection of Linear Symmetry*. In Proceedings of the IEEE First International Conference on Computer Vision (ICCV), pages 433–438, 1987.
- [Billy 04] F. Billy, G. Pineau, M. Arghir, L. Dupuis, A. Bernard, C. Refin & Y. Jolit. *Rapport d'étape n°4 : conception, réalisation et qualification du banc d'essais*. Université de Poitiers, 2004.
- [Billy 05] F. Billy. *Analyse de l'effet des surfaces texturées dans un film mince. Application aux joints d'étanchéités*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2005.
- [Black 96] M. J. Black & P. Anandan. *The Robust Estimation of Multiple Motions : Parametric and Piecewise-Smooth Flow Fields*. Computer Vision and Image Understanding, vol. 63, no. 1, pages 75–104, 1996.
- [Black 98] M. J. Black, F. Berard, A. Jepson, W. Newman, E. Saund, G. Socher & M. J. Taylor. *The Digital Office : Overview*. In Proceedings of the AAAI Spring Symposium on Intelligent Environments, pages 1–6, 1998.
- [Bobick 01] A. F. Bobick & J. W. Davis. *The recognition of human movement using temporal templates*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 23, no. 3, pages 257–267, 2001.
- [Bouthemy 99] P. Bouthemy, M. Gelgon & F. Ganansia. *A unified approach to shot change detection and camera motion characterization*. IEEE Transac-

- tion on Circuits and Systems for Video Technology, vol. 9, no. 7, pages 1030–1044, 1999.
- [Broszio 99] H. Broszio & O. Grau. *Robust Estimation of Camera Parameters Pan, Tilt and Zoom for Integration of Virtual Objects into Video Sequences*. In Proceedings of the International Workshop on Synthetic-Hybrid Coding and 3D Imaging, 1999.
- [Brox 02a] T. Brox. *Smoothing of Matrix-Valued Data*. PhD thesis, University of Mannheim, 2002.
- [Brox 02b] T. Brox & J. Weickert. *Nonlinear Matrix Diffusion for Optic Flow Estimation*. In Proceedings of the 24th DAGM Symposium on Pattern Recognition, pages 446–453, 2002.
- [Bruhn 05] A. Bruhn, J. Weickert & C. Schnörr. *Lucas/Kanade meets Horn/Schunck : Combining local and global optic flow methods*. International Journal of Computer Vision, vol. 61, no. 3, pages 211–231, 2005.
- [Bruno 00] E. Bruno & D. Pellerin. *Global Motion Fourier Series Expansion for Video Indexing and Retrieval*. In Proceedings of the 4th International Conference on Advances in Visual Information Systems, pages 327–337, 2000.
- [Bruno 01a] E. Bruno. *De l'estimation locale à l'estimation globale de mouvement dans les séquences d'images*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2001.
- [Bruno 01b] E. Bruno & D. Pellerin. *Global Motion Model Based on B-Spline Wavelets : Application to Motion Estimation and Video Indexing*. In Proceedings of the International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, pages 289–294, 2001.
- [Chandrashekara 03] R. Chandrashekara, A. Rao, G. I. Sanchez-Ortiz, R. H. Mohiaddin & D. Rueckert. *Construction of a statistical model for cardiac motion analysis using nonrigid image registration*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 2732, pages 599–610, 2003.
- [Cheney 82] E. W. Cheney. *Introduction to approximation theory : Second edition*. American Mathematical Society, 1982.
- [Childs 99] D. W. Childs & P. Fayolle. *Test Results for Liquid «Damper» Seals Using a Round-Hole Roughness Pattern for the Stators*. Journal of Tribology, vol. 121, no. 1, pages 42–49, 1999.
- [Cordier 02a] L. Cordier & M. Bergmann. *Proper Orthogonal Decomposition : An Overview*. In Proceedings of the Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2002.
- [Cordier 02b] L. Cordier & M. Bergmann. *Two typical applications of POD : coherent structures eduction and reduced order modelling*. In Proceedings of the Lecture series 2002-04 on post-processing of experimental and numerical data. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 2002.
- [Corpetti 02] T. Corpetti. *Estimation et analyse de champs denses de vitesses d'écoulements fluides*. PhD thesis, Université de Rennes, 2002.
- [Corpetti 06] T. Corpetti, D. Heitz, G. Arroyo, E. Mémin & A. Santa-Cruz. *Fluid experimental flow estimation based on an optical-flow scheme*. Experiments in Fluids, vol. 40, no. 1, pages 80–97, 2006.

- [David 05a] L. David. *Habilitation à Diriger les Recherches (HDR)*. Université de Poitiers, 2005.
- [David 05b] L. David, B. Augereau, B. Tremblais & A. Texier. *Analyse du mouvement par flot optique*. In Proceedings of the Colloque de visualisation et de traitement d'images en mécanique des fluides (FLUVISU), 2005.
- [David 06] L. David, F. Scarano & P. Braud. *Accélérométrie plane par PIV-RT ou double plans : avantages et limitations*. In Proceedings of the Congrès Francophone de Techniques Laser, pages 273–280, 2006.
- [Delville 99] J. Delville, L. Ukeiley, L. Cordier, J. P. Bonnet & M. Glauser. *Examination of large-scale structures in a turbulent plane mixing layer. Part 1. Proper Orthogonal Decomposition*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 391, pages 91–122, 1999.
- [Deshpande 94] M. D. Deshpande & P. N. Shankar. *Direct numerical simulation of a complex turbulent flow*. Current science, vol. 66, no. 10, pages 767–770, 1994.
- [Doulaverakis 04] C. Doulaverakis, S. Vagionitis, M. Zervakis & E. G. M. Petrakis. *Adaptive Methods for Motion Characterization and Segmentation of MPEG Compressed Frame Sequences*. In Proceedings of the International Conference on Image Analysis and Recognition, pages 310–317, 2004.
- [Druon 06a] M. Druon, B. Tremblais & B. Augereau. *Vector Fields Modelization Using Basis of Polynomials : Application to the Analysis of Simple Face Movements*. In Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), 2006.
- [Druon 06b] M. Druon, B. Tremblais, B. Augereau, F. Billy & L. David. *Algorithmes pour la vélocimétrie par imagerie de particules résolue dans le temps*. In Proceedings of the Congrès francophone de techniques laser (CFTL), pages 243–252, 2006.
- [Durik 01] M. Durik & J. Benois-Pineau. *Robust Motion Characterisation for Video Indexing Based on MPEG2 optical flow*. In Proceedings of the International Workshop on Content-Based Multimedia Indexing, pages 57–64, 2001.
- [Fablet 01] R. Fablet. *Modélisation statistique non paramétrique et reconnaissance du mouvement dans des séquences d'images ; application à l'indexation vidéo*. PhD thesis, Université de Rennes, 2001.
- [Fablet 03] R. Fablet & P. Bouthemy. *Motion Recognition Using Nonparametric Image Motion Models Estimated from Temporal and Multiscale Cooccurrence Statistics*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence archive, vol. 25, no. 12, pages 1619–1624, 2003.
- [Fleet 00] D. J. Fleet, M. J. Black, Y. Yaccob & A. D. Jepson. *Design and Use of Linear Models for Image Motion Analysis*. International Journal of Computer Vision, vol. 36, no. 3, pages 171–193, 2000.
- [Galvin 98] B. Galvin, B. McCane, K. Novins, D. Mason & S. Mills. *Recovering motion fields : An evaluation of eight optical flow algorithms*. In Proceedings of the British Machine Vision Conference, pages 195–204, 1998.

- [Gavrila 99] D. M. Gavrila. *The Visual Analysis of Human Movement : A Survey*. Computer Vision and Image Understanding, vol. 73, no. 1, pages 82–98, 1999.
- [Gerbrands 81] J. J. Gerbrands. *On the relationships between SVD, KLT and PCA*. Pattern Recognition, vol. 14, no. 1-6, pages 375–381, 1981.
- [Golub 65] G. H. Golub & W. Kahan. *Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix*. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Series B : Numerical Analysis, vol. 2, no. 2, pages 205–224, 1965.
- [Golub 70] G. H. Golub & C. Reinsch. *Singular value decomposition and least squares solutions*. Numerical Mathematics, vol. 14, no. 5, pages 403–420, 1970.
- [Golub 96] G. H. Golub & C. F. Van Loan. *Matrix computations - third edition*. The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [Guil 94] N. Guil & E. Zapata. *A Fast Generalized Hough Transform*. In Proceedings of the European Robotic and Systems Conference, pages 498–510, 1994.
- [Harris 88] C. Harris & M. Stephens. *A Combined Corner and Edge Detection*. In Proceedings of the Fourth Alvey Vision Conference, pages 147–151, 1988.
- [Hati 01] S. Hati & S. Sengupta. *Robust camera parameter estimation using genetic algorithm*. Pattern Recognition Letters, vol. 22, no. 3-4, pages 289–298, 2001.
- [Heitz 08] D. Heitz, P. Héas, E. Mémin & J. Carlier. *Dynamic consistent correlation-variational approach for robust optical flow estimation*. Experiments in Fluids, vol. 45, no. 4, pages 595–608, 2008.
- [Hoey 00] J. Hoey & J. J. Little. *Representation and recognition of complex human motion*. In Proceedings of the Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pages 752–759, 2000.
- [Hoey 02] J. Hoey. *Clustering contextual facial display sequences*. In Proceedings of the IEEE Conference on Automatic Face and Gesture Recognition, pages 354–359, 2002.
- [Holmes 98] P. Holmes, J. L. Lumley & G. Berkooz. *Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry*. Cambridge Monographs on Mechanics, 1998.
- [Horn 81] B. K. P. Horn & B. G. Schunck. *Determining Optical Flow*. Artificial Intelligence, vol. 17, no. 1-3, pages 185–203, 1981.
- [Horn 93] B. K. P. Horn & B. G. Schunck. *"Determining Optical Flow" : a Retrospective*. Artificial Intelligence, vol. 59, no. 1-2, pages 81–87, 1993.
- [Hotelling 33] H. Hotelling. *Analysis of a complex statistical variables into principal components*. Journal of Educational Psychology, vol. 24, pages 417–441, 1933.
- [Hough 62] P. Hough. *Method and Means for Recognizing Complex Patterns*. US Patent no. 3,069,654, 1962.

- [Jolliffe 02] I. T. Jolliffe. *Principal component analysis* - second edition. Springer, 2002.
- [Kihl 08a] O. Kihl, L. Chatellier, B. Tremblais & B. Augereau. *Détection de structures singulières : étude comparative de deux approches*. In Proceedings of the Congrès Francophone de Techniques Laser (CFTL), 2008.
- [Kihl 08b] O. Kihl, B. Tremblais & B. Augereau. *Multivariate Orthogonal Polynomials to Extract Singular Points*. In Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), 2008.
- [Koseff 84] J. R. Koseff & R. L. Street. *The Lid-Driven Cavity Flow : A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observations*. Journal of Fluid Engineering, vol. 106, pages 390–398, 1984.
- [Kurtulus 07] D. F. Kurtulus, F. Scarano & L. David. *Unsteady aerodynamic forces estimation on a square cylinder by TR-PIV*. Experiments in Fluids, vol. 42, no. 2, pages 185–196, 2007.
- [Lebart 95] L. Lebart, A. Morineau & M. Piron. *Statistique exploratoire multidimensionnelle*. Dunod Paris, 1995.
- [Lecordier 97] B. Lecordier. *Étude de l'interaction de la propagation d'une flamme prémélangée avec le champ aérodynamique, par association de la tomographie laser et de la vélocimétrie par images de particules*. PhD thesis, Université de Rouen, 1997.
- [Li 02] Y. Li, T. Wang & Shum H.-Y. *Motion texture : A two-level statistical model for character motion synthesis*. ACM Transactions on Graphics, vol. 21, no. 3, pages 465–472, 2002.
- [Liu 98] H. Liu, T.-H. Hong, M. Herman, T. Camus & R. Chellappa. *Accuracy vs Efficiency Trade-offs in Optical Flow Algorithms*. Computer Vision and Image Understanding, vol. 72, no. 3, pages 271–286, 1998.
- [Liu 08] T. Liu & L. Shen. *Fluid Flow and Optical Flow*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 614, pages 253–291, 2008.
- [Loève 94] M. Loève. *Probability theory ii* - fourth edition. Springer, 1994.
- [Lucas 81] B. D. Lucas & T. Kanade. *An Iterative Image Registration Technique with an Application to Stereo Vision*. In Proceedings of the Image Understanding Workshop, pages 121–130, 1981.
- [Lucas 84] B. D. Lucas. *Generalized Image Matching by the Method of Differences*. PhD thesis, Carnegie Mellon University, 1984.
- [Lumley 67] J. Lumley. *The structure of inhomogeneous turbulent flows*. Atmospheric turbulence and radio wave propagation, pages 166–178, 1967.
- [media.xiph.org 08] media.xiph.org. *xiph.org Test Media*. media.xiph.org/video/derf/, 2008.
- [Milanese 99] R. Milanese, F. Deguillaume & A. Jacot-Descombes. *Efficient segmentation and camera motion indexing of compressed video*. Real-Time Imaging, vol. 5, no. 4, pages 231–241, 1999.
- [Mémmin 99] E. Mémmin & P. Perez. *Fluid motion recovery by coupling dense and parametric vector fields*. In Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV), pages 620–625, 1999.

- [Mémin 03] E. Mémin. *Habilitation à Diriger les Recherches (HDR)*. Université de Rennes, 2003.
- [Nagel 86] H. H. Nagel & W. Enkelmann. *An investigation of smoothness constraints for the estimation of displacement vector fields from image sequences*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 8, no. 5, pages 565–593, 1986.
- [Nelson 92] R. C. Nelson & R. B. Polana. *Qualitative recognition of motion using temporal texture*. Computer Vision, Graphics and Image Processing, vol. 56, no. 1, pages 78–89, 1992.
- [Ngo 00] C.-W. Ngo, T.-C. Pong, H.-J. Zhang & R. T. Chin. *Motion Characterization by Temporal Slices Analysis*. In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pages 768–775, 2000.
- [Ngo 02] C.-W. Ngo, T.-C. Pong & H.-J. Zhang. *Motion-Based Video Representation for Scene Change Detection*. International Journal of Computer Vision, vol. 50, no. 2, pages 127–142, 2002.
- [Odobez 95] J. M. Odobez & P. Bouthemy. *Robust Multiresolution Estimation of Parametric Motion Models*. Visual Communication and Image Representation, vol. 6, no. 4, pages 348–365, 1995.
- [Park 04] S.-C. Park, H.-S. Lee & S.-W. Lee. *Qualitative estimation of camera motion parameters from the linear composition of optical flow*. Pattern Recognition, vol. 37, no. 4, pages 767–779, 2004.
- [Parseval 99] M. A. Parseval. *Mémoire sur les séries et sur l'intégration complète d'une équation aux différences partielles linéaires du second ordre, à coefficients constants*. 1799.
- [Perona 95] P. Perona. *Deformable Kernels for Early Vision*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 17, no. 5, pages 488–499, 1995.
- [Perret 04] L. Perret. *Étude du couplage instationnaire calculs-expériences en écoulements turbulents*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2004.
- [Piriou 05] G. Piriou. *Modélisation statistique du mouvement dans des séquences d'images pour la reconnaissance de contenus dynamiques*. PhD thesis, Université de Rennes, 2005.
- [Polana 94] R. B. Polana. *Temporal texture and activity recognition*. PhD thesis, University of Rochester, 1994.
- [Quénot 98] G. M. Quénot, J. Pakleza & T. A. Kowalewski. *Particle image velocimetry with optical flow*. Experiments in Fluids, vol. 25, no. 3, pages 177–189, 1998.
- [Rao 92] A. R. Rao & R. C. Jain. *Computerized Flow Field Analysis : Oriented Texture Fields*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 14, no. 7, pages 693–709, 1992.
- [Rice 69] J. R. Rice. *Approximation des fonctions - théorie linéaire*. DUNOD, 1969.
- [Rivlin 03] T. J. Rivlin. *An introduction to the approximation of functions*. Dover Publications, 2003.



- [Ruhnau 05] P. Ruhnau, T. Kohlberger, C. Schnörr & H. Nobach. *Variational optical flow estimation for particle image velocimetry*. Experiments in Fluids, vol. 38, no. 1, pages 21–32, 2005.
- [Sáez 03] E. Sáez, J. M. Palomares, J. I. Benavides & N. Guil. *Global motion estimation algorithm for video segmentation*. In Proceedings of the Visual Communications and Image Processing, pages 1540–1550, 2003.
- [Sakoe 78] H. Sakoe & S. Chiba. *Dynamic programming algorithm optimization for spoken word recognition*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol. 26, no. 1, pages 43–49, 1978.
- [Scarano 99] F. Scarano & M. L. Riethmuller. *Iterative multigrid approach in PIV image processing with discrete window offset*. Experiments in Fluids, vol. 26, no. 6, pages 513–523, 1999.
- [Scarano 00] F. Scarano & M. L. Riethmuller. *Advances in iterative multigrid PIV image processing*. Experiments in Fluids, vol. 29, no. 7, pages 51–60, 2000.
- [Scarano 02] F. Scarano. *Iterative image deformation methods in P.I.V.* Measurement, Science and Technology, vol. 13, no. 1, pages R1–R19, 2002.
- [Sirovich 87] L. Sirovich. *Turbulence and the dynamics of coherent structures*. Quarterly of Applied Mathematics, vol. 45, pages 561–590, 1987.
- [Sirovich 89] L. Sirovich & C. H. Sirovich. *Low dimensional description of complicated phenomena*. Contemporary Mathematics, vol. 99, pages 277–308, 1989.
- [Sloane 08] N. J. A. Sloane. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. [www.research.att.com/~njas/sequences/](http://www.research.att.com/~njas/sequences/), 2008.
- [Smeaton 06] A. F. Smeaton, P. Over & W. Kraaij. *Evaluation campaigns and TREC-Vid*. In Proceedings of the 8th ACM International Workshop on Multimedia Information Retrieval, pages 321–330, 2006.
- [Smeaton 08] A. F. Smeaton, P. Over & W. Kraaij. *TREC Video Retrieval Evaluation*. [www-nlpir.nist.gov/projects/trecvid/](http://www-nlpir.nist.gov/projects/trecvid/), 2008.
- [Spies 01] H. Spies & H. Scharr. *Accurate Optical Flow in Noisy Image Sequences*. In Proceedings of the IEEE Eighth International Conference on Computer Vision (ICCV), pages 587–592, 2001.
- [Stewart 93] G. W. Stewart. *On the early history of the singular value decomposition*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM) Review, vol. 35, no. 4, pages 551–566, 1993.
- [Stiller 99] C. Stiller & J. Konrad. *Estimating motion in image sequences : A tutorial on modeling and computation of 2D motion*. IEEE Signal Processing Magazine, vol. 16, no. 4, pages 70–91, 1999.
- [Susset 02] A. Susset. *Développement de traitements d’images pour l’étude de la stabilisation de flammes turbulentes non-prémélangées générées par des brûleurs industriels modèles*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2002.
- [Suter 94] D. Suter. *Motion estimation and vector splines*. In Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, pages 939–942, 1994.

- [Szegö 75] G. Szegö. *Orthogonal polynomials* : Fourth edition. American Mathematical Society, 1975.
- [Szummer 96] M. Szummer & R. W. Picard. *Temporal texture modeling*. In *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, pages 823–826, 1996.
- [Tudor 95] P. N. Tudor. *MPEG-2 Video Compression*. *Electronics and Communications Engineering Journal*, vol. 7, no. 6, pages 257–264, 1995.
- [Weickert 99] J. Weickert. *Coherence-Enhancing Diffusion Filtering*. *International Journal of Computer Vision*, vol. 31, no. 2-3, pages 111–127, 1999.
- [Wu 00] Y.-T. Wu, T. Kanade, C.-C. Li & J. Cohn. *Image Registration Using Wavelet-Based Motion Model*. *International Journal of Computer Vision*, vol. 38, no. 2, pages 129–152, 2000.
- [Zaharia 01] T. Zaharia & F. Preteux. *Parametric Motion Models for Video Content Description within the MPEG-7 Framework*. In *Proceedings of the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference*, pages 118–132, 2001.



# **Modélisation du mouvement par polynômes orthogonaux : application à l'étude d'écoulements fluides**

**Résumé :** Dans ce mémoire, nous proposons une méthode permettant de modéliser, de façon globale, tout type de mouvement par des combinaisons linéaires de polynômes orthogonaux. Pour cela, nous projetons chaque champ de déplacement représentant le mouvement étudié sur une base orthogonale composée des polynômes de Legendre. Nous obtenons alors une expression polynomiale du mouvement considéré. Une modélisation d'ordre faible permet d'interpréter physiquement le mouvement dominant de séquences d'images. Cette caractéristique trouve un intérêt particulier dans des applications telles que la vidéo-surveillance, l'indexation ou l'étude du comportement. Nous montrons également que notre méthode permet de modéliser des mouvements complexes tels que des écoulements fluides. La représentation du mouvement sous forme polynomiale, les faibles temps de calcul ainsi que les taux de compression élevés sont alors des atouts importants pour traiter ce type de données.

---

## **Movement modelling with orthogonal polynomials : application to the fluid flow study**

**Abstract :** In this PhD thesis, we suggest a method which globally models every kind of movement with linear combinations of orthogonal polynomials. In order to do that, we project each vector field, which represents the studied motion, onto an orthogonal basis of Legendre's polynomials. So, we achieve a polynomial expression of this movement. A low-order modelling permits to give a physical interpretation to the dominant motion of the image sequence. This feature is interesting for applications like visual surveillance, indexing or behaviour study. We prove that our method can also model complex motions like fluid flows. The polynomial representation, the low-time computing and the high compression rate have a significant practical importance to analyse this kind of data.

---

**Discipline :** traitement du signal et des images

---

**Mots clés :** modélisation du mouvement, analyse du mouvement, polynômes orthogonaux, écoulements fluides, décomposition orthogonale aux valeurs propres

---

Laboratoire XLIM-SIC, UMR CNRS 6172  
Bâtiment SP2MI - Téléport 2, Bd Marie et Pierre Curie  
BP 30179 - 86962 Futuroscope Chasseneuil CEDEX